



João Paulo Pereira Barbosa Roque da Silva

Estudo dos diferentes métodos de cálculo de incertezas utilizados na calibração de balanças manométricas

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Mecânica

Orientadora: Professora Doutora Helena Víctorovna Guitiss
Navas, Professora Auxiliar, FCT/UNL
Coorientadora: Eng.^a Isabel Pacheco Spohr, Instituto
Português da Qualidade

Júri

Presidente: Professor Doutor Rui Fernando dos Santos Pereira
Martins

Arguentes: Professora Doutora Ana Sofia Leonardo Vilela de
Matos

Doutora Maria Isabel Araújo Godinho

Vogais: Doutora Helena Víctorovna Guitiss Navas

Engenheira Isabel Pacheco Spohr



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Setembro de 2012



João Paulo Pereira Barbosa Roque da Silva

Estudo dos diferentes métodos de cálculo de incertezas utilizados na calibração de balanças manométricas

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Mecânica

Orientadora: Professora Doutora Helena Víctorovna Guitiss
Navas, Professora Auxiliar, FCT/UNL
Coorientadora: Eng.^a Isabel Pacheco Spohr, Instituto
Português da Qualidade

Júri

Presidente: Professor Doutor Rui Fernando dos Santos Pereira
Martins

Arguentes: Professora Doutora Ana Sofia Leonardo Vilela de
Matos

Doutora Maria Isabel Araújo Godinho

Vogais: Doutora Helena Víctorovna Guitiss Navas

Engenheira Isabel Pacheco Spohr



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Setembro de 2012

Estudo dos diferentes métodos de cálculo de incertezas utilizados na calibração de Balanças Manométricas

Copyright ©2011 de João Paulo Pereira Barbosa Roque da Silva, FCT/UNL.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que tenha a permissão do Instituto Português da Qualidade e seja dado crédito ao editor.

Agradecimentos

A finalização desta dissertação representa mais um objetivo concretizado na vida do autor. O autor gostaria de agradecer à equipe de pessoas que constitui o IPQ, em especial à sua coorientadora Eng^a. Isabel Spohr, que felizmente foi uma pessoa que estava em plena sintonia com ele, às suas colegas Sheila e Sandra, que por pouco tempo que tenha sido, lhe fizeram companhia, à professora Helena Navas e à professora Maria de Fátima Miguéns pela sua ajuda.

O autor não esquece também, em geral, todos os seus colegas que estiveram presentes em alguns dos momentos que constituíram o tempo que levou a elaborar esta dissertação.

Por ultimo, seus pais, que lhe possibilitaram todo o percurso escolar, pois sem eles nada disto seria possível. E ao resto da sua família só por serem quem são, presentes e não presentes.

Resumo:

A exigência relativamente à exatidão e à precisão de medições na indústria, tem vindo a aumentar significativamente. Para tal, é necessário uma constante evolução dos aparelhos de medida e calibração. Por sua vez, para que haja uniformidade nas medições a nível internacional, é necessário que todos os instrumentos de calibração primários sejam calibrados recorrendo a métodos estatísticos complexos e precisos. O objetivo desta dissertação consiste em analisar métodos numéricos utilizados pelos diferentes Laboratórios Nacionais de Metrologia a nível europeu, na determinação dos valores da área efetiva à pressão nula A_0 , e o coeficiente de distorção com a pressão λ , que definem a área efetiva A_p do conjunto pistão/cilindro em função da pressão, na calibração de Balanças Manométricas. Balanças essas, que servem de padrão a vários instrumentos de medição. Existem várias abordagens estatísticas para determinar e estimar os valores e as respetivas incertezas destes parâmetros, com resultados que poderão divergir significativamente entre os vários métodos. Realizou-se uma comparação “EURAMET Project 1125” utilizando conjuntos de dados simulados, com o objetivo de verificar numericamente a execução dos diferentes métodos utilizados pelos vários institutos.

Verificou-se que utilizando o método OLS se obtêm piores resultados, este método, aumenta no entanto a sua eficácia quando se exclui o primeiro ponto. O método WLS revelou-se suficientemente eficaz para os casos estudados. O método GLS é um método bastante mais exaustivo e conduz a valores muito exatos. Tem-se ainda, o método usado pelo PTB, que considera a existência de uma força F e que se revela muito exato. As estimativas das áreas efetivas calculadas pelos participantes, foram coerentes com os valores teóricos. Contudo as suas incertezas diferem. Esta análise feita pelo IPQ, foi importante, de forma a melhorar e acompanhar a evolução a nível internacional na calibração das Balanças Manométricas.

Palavras-chave: Balança Manométrica, área efetiva, coeficiente de distorção, EURAMET, Project 1125, métodos numéricos.

Abstract:

In sake of engineering and industry, all kind of measurements must be as exact and precise as possible. For that, it's necessary a constant evolution on gages and calibration gages. Thus for uniformity around the world, it is necessary that all primary gages should be calibrated drawing upon complex and precise numerical methods. In this work it was asked to perform an analysis of the numerical methods used by the different NMI's, to determine the values of the effective area at reference pressure A_0 and the distortion coefficient λ , which defines the effective area A_p of the piston-cylinder assembly versus the pressure in cross floating method for calibration of a pressure balance. These types of balances are used as standard gages for several gage instruments. There are several statistical approaches to estimate those values and associated uncertainty of those parameters, which results can significantly differ among the different NMI's. Therefore a comparison EURAMET Project 1125 has been performed by applying simulated data sets in order to verify numerically the performance of the different methods used by the LNMI's.

The OLS method gives the less robust results. This method can be significantly improved by excluding the lowest pressure point. The WLS gives results suitable for this type of analysis. The GLS method, is more complex but gives the more accurate results. An interesting and robust method is used by PTB which assumes the existence of an additional unknown force.

With the results obtained in the comparison, IPQ analyzes each different method, in order to improve and follow the calibration evolution.

Keywords: pressure balance, effective area, distortion coefficient, EURAMET, Project 1125, numerical methods.

Índice

Capítulo 1	1
Introdução	1
1.1. Estrutura da Dissertação	4
1.2. Instituto Português da Qualidade	4
1.3. Metrologia.....	5
1.3.1 Metrologia Legal.....	5
1.3.2 Metrologia Científica e Aplicada	6
Capítulo 2	7
Base Teórica	7
2.1. Princípio de Arquimedes ou da Impulsão	7
2.2. Calibração de uma Balança Manométrica	9
2.2.1. Funcionamento a Gás.....	11
2.2.2. Funcionamento a Óleo	12
2.2.3. Relação entre A_0 e λ	12
2.2.4. Tipos de Grandezas de Influência	13
2.2.5. Coeficiente de Sensibilidade	13
2.2.6. Incertezas do Tipo A e Tipo B	13
2.3. Métodos Estatísticos Utilizados.....	14
2.3.1. Método dos Mínimos Quadrados (OLS).....	16
2.3.2. Método dos Mínimos Quadrados com o primeiro valor excluído	16
2.3.3. Método dos Mínimos Quadrados Ponderados (WLS).....	17
2.3.4. Método dos Mínimos Quadrados Generalizados (GLS)	18
2.3.5. Modelo (A_0, λ, F)	19
Capítulo 3	21
Comparação Realizada no Estudo EURAMET.....	21
3.1. Dados Iniciais Fornecidos para a Comparação	22
3.1.1. Parâmetros das Massas.....	23
3.1.2. Parâmetros Gerais.....	25
3.1.3. Parâmetros Específicos da Balança de Óleo	26
3.1.4. Dados Fornecidos para o 2º Loop	30

3.2. Resultados	31
3.3. Discussão	33
Capítulo 4	35
Aplicação dos Métodos Estatísticos.....	35
4.1. Método dos Mínimos Quadrados Ordinários (OLS)	36
4.2. Método dos Mínimos Quadrados Ordinários Primeiro Valor Excluído	37
4.3. Método dos Mínimos Quadrados Ponderados (WLS)	38
4.4. Método dos Mínimos Quadrados Generalizados (GLS).....	39
4.5. Modelo (A_0, λ, F)	47
Capítulo 5	51
Discussão dos Resultados da Aplicação dos Métodos Estatísticos	51
5.1. Expressões Consideradas	51
5.2. Resultados Obtidos	52
5.3. Discussão dos Resultados	54
Capítulo 6	57
Conclusão	57
Referências Bibliográficas	61

Índice de Figuras

Figura 1.1 - Balança manométrica.....	1
Figura 2.1 - Conjunto pistão - cilindro.....	8
Figura 2.2 - Diferença de altura entre duas BP	10
Figura 2.3 - Recta de regressão linear	15
Figura 3.1 - Gráfico dos A_0 obtidos pelos LNM para o caso 2 a óleo.....	32
Figura 3.2 - Gráfico dos λ obtidos pelos LNM para o caso 2 a óleo	33
Figura 4.1 - Acção da força desconhecida sobre o pistão	488
Figura 5.7 - Gráfico de resultados de A_0 do caso 2 a óleo	533
Figura 5.8 - Gráfico de resultados de λ do caso 2 a óleo	544

Índice de Tabelas

Tabela 3.1 - Métodos aplicados por cada LNM.....	21
Tabela 3.2 - Tabela dos valores teóricos da BM de teste.....	23
Tabela 3.3 - Massas utilizadas/cada ponto de pressão BM a óleo	24
Tabela 3.4 - Condições atmosféricas.....	255
Tabela 3.5 - Características do fluido manométrico	255
Tabela 3.6 - Parâmetros do conjunto pistão-cilindro da balança de referência a óleo	26
Tabela 3.7 - Características das massas do caso 2 da BM a óleo	27
Tabela 3.8 - Massas adicionais aplicadas na BM de referência	28
Tabela 3.9 - Pressão atmosférica em cada ciclo.....	28
Tabela 3.10 - Temperaturas do conjunto pistão-cilindro da BM de referência.....	29
Tabela 3.11 - Temperaturas do conjunto pistão-cilindro da BM de teste	29
Tabela 3.12 - Dados fornecidos para o loop 2 da BM de óleo	30
Tabela 3.13 - Resultados dos LNM para o caso 2 a óleo	31
Tabela 5.2 - Resultados da BM de óleo	53

Simbologia e Notações

A	Área
A_0	Área efetiva à pressão e temperatura de referência (<i>A0 effective area at null pressure</i>)
A_{0c_th}	Valor teórico de área efetiva à pressão e temperatura de referência
A_p	Área efetiva
C	Perímetro
c_i	Coeficiente de sensibilidade
C_h	Correcção de altura
D	Diâmetro
F	Força
G	Aceleração da gravidade
g_i	Ponderação
H	Altura
H_r	Humidade relativa
M	Massa
m_{Ci}	Valor da massa convencional
N	Massa molar de N_2
N	Números de pontos de teste
P	Pressão
P_m	Peso
P_i	Pressão i
P_a	Pressão atmosférica
R	Constante dos gases ideais
R	Raio
T	Temperatura

T_R	Temperatura de referência
U	Incerteza
u_A	Incerteza do tipo A
u_{AB}	Incertezas conjugadas de A e B
u_B	Incerteza do tipo B
V	Variância
X	Grandezas de entrada
\bar{x}	Média
Y	Grandezas de saída
Z	Coeficiente de compressibilidade
α_C	Coeficiente de expansão térmica do cilindro
α_P	Coeficiente de expansão térmica do pistão
β_z	Coeficiente de expansão
Θ	Estimador
Λ	Coeficiente de distorção
λ_{c_th}	Valor teórico do coeficiente de distorção
P	Massa volúmica
ρ_{0a}	Valor convencional da massa volúmica do ar.
ρ_{0mi}	Valor convencional da massa volúmica da massa
\bar{x}	Média
X	Distancia dos pontos à reta de regressão
Γ	Tensão superficial
σ	Desvio padrão
Cov	Covariância

Abreviaturas

IPQ	Instituto Português da Qualidade
LNМ	Laboratórios Nacionais de Metrologia
OLS	Método dos mínimos quadrados ordinários (<i>Ordinary Least Squares</i>)
FCT	Faculdade de Ciências e Tecnologia
WLS	Método dos mínimos quadrados ponderados (do inglês “ <i>Weighted Least Squares</i> ”)
GLS	Método dos mínimos quadrados generalizados (do inglês “ <i>Generalized Least Squares</i> ”)
BM	Balança Manométrica
SPQ	Sistema Português da Qualidade
EURAMET	European Association of National Metrology Institutes
CEN	European Committee for Standardization
CENELEC	European Committee for Electrotechnical Standardization
IEC	International Electrotechnical Commission
CGPM	Conference General des Poids et Mesures
OIML	International Organization for Legal Metrology
ISSO	International Organization for Standardization

Capítulo 1

Introdução

A metrologia tem vindo a ter um desempenho crucial no desenvolvimento de todas as ciências. Especialmente nas ciências naturais onde a física/mecânica newtoniana tem tido o papel mais importante no desenvolvimento industrial.

Em grande parte, toda a indústria pesada, sustenta o seu desenvolvimento, direta ou indiretamente, no tratamento estatístico de valores obtidos em medições. Graças às diversas investigações propostas e apresentadas, torna-se possível uma constante atualização de métodos. Muitos desses estudos visam especificamente uma melhoria de meios para determinar e garantir o resultado mais próximo do real que, como se sabe, é impossível!

A presente dissertação consiste num estudo realizado no âmbito de um estágio no IPQ (Instituto Português da Qualidade) que se apresenta como uma das muitas referências internacionais de metrologia, sendo também a principal entidade de controlo metrológico em Portugal. Tal como o manual de análise de sistemas utilizado pela *General Motors, Chrysler e Ford* refere: “*A maior parte dos países industrializados por todo o mundo têm os seus Laboratórios Nacionais de Metrologia que proporcionam serviços de medição ou padrões de medição de alta qualidade.*” [1]

O reconhecimento atribuído ao instituto em questão (IPQ) é fruto da concordância e cooperação entre os diversos organismos nacionais de metrologia, tendo por base normas-padrão de qualidade e recorrendo a diversos estudos.

O caso de estudo aqui abordado diz respeito á calibração de uma balança manométrica (figura 1.1) que, é realizado utilizando como

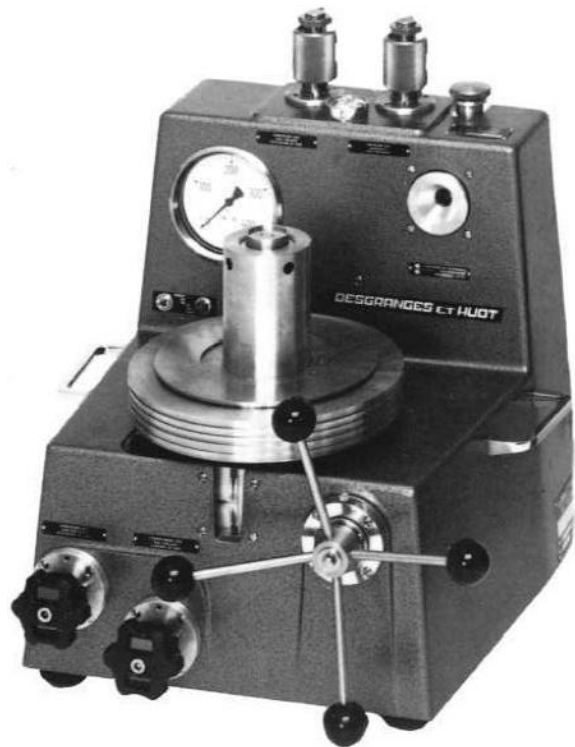


Figura 1.1 - Balança manométrica

padrão outra balança manométrica.

Por sua vez, as balanças manométricas têm como função também a calibração de outros instrumentos de medição de pressão.

Como foi referido, as próprias balanças manométricas são calibradas recorrendo a balanças manométricas padrão, que têm de possuir um nível de exatidão superior (ou igual). Sendo assim, foi lançado um estudo pela EURAMET (*European Association of National Metrology Institutes*) que consistiu em comparar os métodos de cálculo utilizados, em cada um dos quinze países europeus participantes, na calibração de balanças manométricas.

Foi realizado um exercício teórico de calibração de uma balança manométrica (BM) a gás e outra a óleo, recorrendo a um simulador de valores, de forma a cada LNM determinasse matematicamente três parâmetros diferentes e as suas incertezas associadas:

- A área efetiva (A_p), que é a área de contacto entre a base do pistão e o fluido manométrico (Gás ou Óleo);
- A área à pressão nula (A_0) que, tal como a designação indica, é a área de contacto entre o pistão e o fluido manométrico à pressão atmosférica
- E por fim o coeficiente de distorção (λ).

Parâmetros esses, que são relacionados de acordo com a expressão 1.1:

$$A_p = A_0 (1 + \lambda P) \quad (1.1)$$

Sendo (P) a pressão.

Todos os parâmetros e as suas incertezas obtidos por cada LNM foram enviados para o laboratório piloto que realizou a comparação com os restantes institutos. Verificou-se nas balanças a gás e a óleo um desvio significativo no cálculo dos valores de A_p .

Recorrendo à equação 1.1 é possível obter-se os valores de A_0 e λ , sabendo-se à partida os valores de A_p e P . No entanto os desvios entre os valores obtidos deveram-se essencialmente aos diferentes métodos numéricos utilizados por cada LNM na sua abordagem numérica à equação 1.1, existindo diferenças entre os valores de A_p obtidos por cada país.

Neste sentido, o laboratório piloto propôs outro estudo, um 2º *loop*. Desta vez apenas focado nos diferentes métodos numéricos aplicados pelos LNM, no qual apenas foi solicitado o cálculo de A_0 e λ .

Os dados fornecidos correspondiam a 10 pontos de pressão nominal, que por sua vez, correspondiam aos valores de A_p e suas incertezas associadas.

Concluído o 2º *loop*, o laboratório piloto realizou o relatório preliminar da comparação. Uma vez que se verificou a existência de métodos mais exatos e precisos aplicados por outros LNM. O IPQ pretende com este estágio, investigar e analisar todos os métodos aplicados.

Tem de se ter em conta a dificuldade na aplicação de cada método, visto que, muitos deles fornecem valores mais exatos, mas, por se revelarem demasiadamente complexos, a sua utilização é questionável. Muitos desses métodos podem implicar um maior investimento de tempo, de ferramentas, ou mesmo de qualificação de pessoal o que se vai refletir em custos acrescidos que poderão não ser justificáveis face à exatidão necessária.

Para realizar essa análise é necessário:

- Conhecer o processo de calibração de uma balança manométrica e os fatores que influenciam os parâmetros a determinar.
- Aplicar os vários métodos numéricos de forma a serem conhecidos os recursos necessários para a aplicação de cada método.
- Comparar os resultados obtidos com os valores teóricos.
- Fazer um balanço entre os recursos necessários associados ao método numérico utilizado e a exatidão obtida pelo mesmo
- Fazer uma seleção ponderada de forma a otimizar o processo de cálculo dos fatores e suas incertezas associadas.

O objetivo é saber como aplicar cada método e quais os requisitos associados, para verificar qual será o método preferencial.

1.1. Estrutura da Dissertação

A presente dissertação contém 6 capítulos.

O Capítulo 1 (Introdução), descreve em termos gerais, a problemática que serviu de base para a dissertação, sendo feita uma breve descrição do IPQ.

O Capítulo 2, introduz alguns conceitos teóricos que serviram de base a todo o trabalho desenvolvido na dissertação.

O Capítulo 3, descreve detalhadamente a razão pela qual este estudo foi feito. Assim como fornece os dados que dizem respeito ao caso de estudo e que serviram de ferramentas para todo este projeto.

O Capítulo 4, contém a descrição detalhada da aplicação dos métodos descritos na base teórica.

O Capítulo 5, refere os resultados obtidos bem como a sua discussão.

O Capítulo 6, por fim, contém as conclusões que foram obtidas no decorrer da análise global deste trabalho e são ainda feitas sugestões para a elaboração de trabalhos futuros nesta mesma área de estudo.

1.2. Instituto Português da Qualidade

O Instituto Português da Qualidade, (IPQ), é um instituto público, integrado no Ministério da Economia, com um efetivo total de cerca de 100 colaboradores. Foi criado em 1986, na sequência da adesão de Portugal à União Europeia, substituindo outros organismos que desenvolviam a sua atividade no domínio das infraestruturas da qualidade [2].

Nos termos da sua lei orgânica aprovada pelo Decreto-Lei n.º 142/2007, de 27 de Abril, e dos seus Estatutos aprovados pela Portaria 888/2010, de 13 de Setembro, o IPQ tem por missão a coordenação do Sistema Português da Qualidade (SPQ) e de outros sistemas de qualificação regulamentar que lhe forem conferidos por lei, a promoção e a coordenação de atividades que

visem contribuir para demonstrar a credibilidade da ação dos agentes económicos, bem como o desenvolvimento das atividades inerentes à sua função de laboratório nacional de metrologia [2].

Como Organismo Nacional de Normalização, ao IPQ compete, designadamente, promover a elaboração de normas portuguesas, garantindo a coerência e atualidade do acervo normativo nacional e promover o ajustamento de legislação nacional sobre produtos às normas da União Europeia [2].

1.3. Metrologia

Como já foi referido, na grande maioria dos países, existe uma entidade semelhante ao IPQ, que genericamente se designam por Laboratórios Nacionais de Metrologia (LNM), que para além de terem um departamento de metrologia científica, possuem também um departamento de metrologia legal.

1.3.1 Metrologia Legal

No caso particular do IPQ, ao departamento de metrologia legal, foram-lhe atribuídas as seguintes competências:

- Aprovações de modelo de instrumentos de medição,
- Elaboração de legislação metrológica e promoção da sua aplicação,
- Realização de ações de formação na área de controlo metrológico,
- Qualificação e acompanhamento de entidades para a realização de operações de controlo metrológico.

1.3.2 Metrologia Científica e Aplicada

A unidade de metrologia científica e aplicada tem como funções os seguintes pontos:

- Realização dos padrões nacionais das unidades de medida,
- Rastreabilidade dos padrões de referência de outros laboratórios nacionais,
- Realização de comparações internacionais e nacionais,
- Realização de ensaios de controlo metrológico

Devido à enorme abrangência das responsabilidades acima discriminadas, a metrologia científica e aplicada do IPQ é dividida nos seguintes departamentos:

- Comprimento, Tempo e Frequência e Fotometria;
- Eletricidade, Temperatura e Acústica
- Quantidade de Matéria e Eletroquímica
- Massa, Volume e Propriedades de Líquidos

As BM de referência, utilizadas na calibração no laboratório de pressão, são da responsabilidade do departamento de Massa, Volume e Propriedades de Líquidos na unidade de metrologia científica e aplicada.

Para haver uniformidade entre os vários países são realizadas reuniões de peritos para a definição de procedimentos e técnicas transversais aos vários países que vão assegurar a missão das inúmeras estruturas europeias e internacionais, designadamente, no *European Committee for Standardization (CEN)*, no *European Committee for Electrotechnical Standardization (CENELEC)*, na *International Electrotechnical Commission (IEC)*, na *Conference General des Poids et Mesures (CGPM)*, na *International Organization for Legal Metrology (OIML)*, e na *International Organization for Standardization (ISO)*. [2]

Capítulo 2

Base Teórica

Começa-se por realçar e chamar a atenção dos conceitos chave que são necessários para levar a cabo este estudo.

Faz-se então uma abordagem ao princípio de Arquimedes, que é um princípio físico; uma abordagem ao processo de calibração de uma balança manométrica e por fim uma abordagem às bases matemáticas que apoiam os métodos estatísticos aplicados à calibração.

2.1. Princípio de Arquimedes ou da Impulsão

Impulsão é a força hidrostática exercida por um fluido (líquido ou gás) em condições hidrostáticas sobre um corpo que nele esteja imerso. A impulsão existe graças à diferença de pressão hidrostática do corpo, visto que esta é proporcional à massa volúmica do líquido (ou densidade), à aceleração da gravidade, e à altura de profundidade. [3]

Assim, sendo a equação (2.1) aplicado á balança manométrica, permite medir a pressão exercida, que é equivalente à força exercida pelas massas (normalmente massas padrão), recorrendo a um mecanismo de êmbolo cilindro exemplificado na figura 2.1.

$$P = \frac{F}{A} \quad (2.1)$$

Sendo no caso a área de um círculo, em que é representado por (2.2):

$$A = \int_0^r 2\pi r dr \quad (2.2)$$

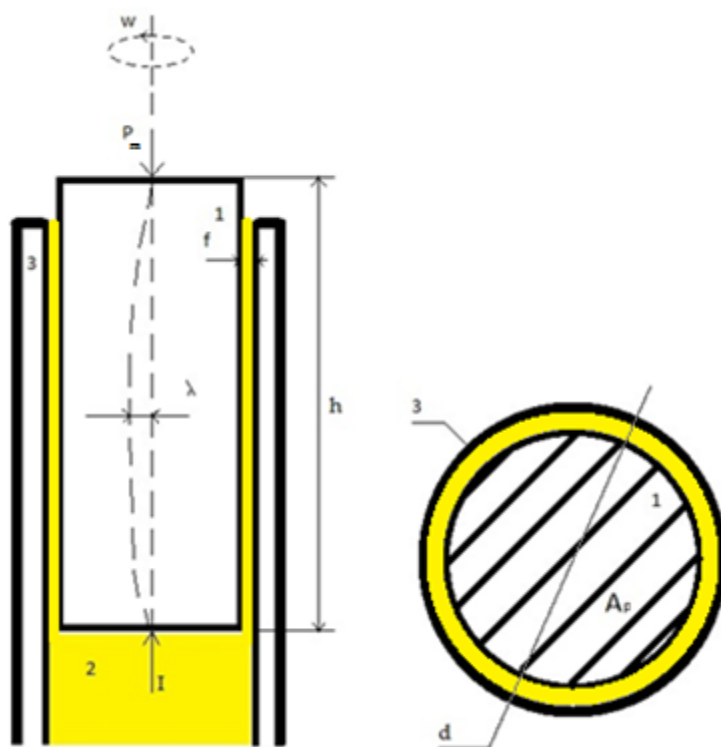


Figura 2.1 - Conjunto pistão – cilindro

Legenda:

1 – Pistão

2 – Fluido manométrico

3 – Cilindro

w – Velocidade de rotação axial

P_m – Peso aplicado sobre o pistão

h – altura do cilindro

f – Folga

λ - Coeficiente de distorção

I – Impulsão

A_p - Área efetiva

d – Diâmetro do pistão

No que respeita ao peso aplicado no cilindro este, é materializado por aplicação de massas padrão (valor conhecido) em formato de disco ou em pequenos cilindros. São contabilizados no peso total não só as massas adicionadas, como o peso do próprio pistão e um sino que se coloca á volta do pistão para comportar os discos correspondentes às massas mais pesadas, que materializam os diversos pontos de pressão.

Sendo necessário uma distribuição uniforme das massas em torno do pistão, existe um sistema de rotação que faz com que as massas rodem ($w \approx 30$ rpm), para assim se aproximarem de uma distribuição das massas uniforme e reduzir o erro associado, devido há possibilidade de ocorrerem forças parasitas tal como a fricção que ocorreria entre o pistão e a parte interior do cilindro.

2.2. Calibração de uma Balança Manométrica

Foram fornecidos valores da tensão superficial do líquido e os coeficientes de expansão térmica. Todos estes valores tinham associados as respectivas incertezas [4].

O estudo abrangeu 2 casos para uma balança a gás (0,2 a 10) MPa e outros 2 para óleo (5 a 500) MPa, cujos intervalos de medição, foram divididos em 10 patamares de pressão de funcionamento diferentes, em que cada um dos 2 casos tinha ligeiras variações nos valores fornecidos, variando assim as condições do estudo [4].

A_p é obtido recorrendo a medições diretas dos valores da Pressões recorrendo à equação 2.3

$$P = \frac{F}{A} = \frac{M \cdot g + \Gamma \cdot C}{A_p \cdot [1 + (\alpha_p + \alpha_c) \cdot (T - T_r)]} + C_h \quad (2.3)$$

Sendo:

P – Pressão

M – Massa aplicada ao pistão

g – Gravidade local

Γ - Tensão superficial do líquido (Gás $\Gamma = 0$)

C_h - Diferença de altura entre BM de referência e a BM de teste ($C_h = \rho \cdot g \cdot h$)

C – Perímetro do pistão

A_p - Área efetiva

α_p - Coeficiente de expansão linear térmica do pistão

α_c - Coeficiente de expansão linear térmica do cilindro

T – Temperatura do conjunto pistão cilindro

Em que são conhecidos todos os fatores da equação (2.3) e podendo calcular-se para cada patamar de pressão o valor de A_p do conjunto pistão cilindro á temperatura de referência T_r e pressão P_e . Para calibrar a balança em teste, obtendo-se uma situação de equilíbrio entre as duas balanças, realizando o *cross-float*, têm de ser adicionadas massas de acerto á balança de referência. (figura 2.2) [4].

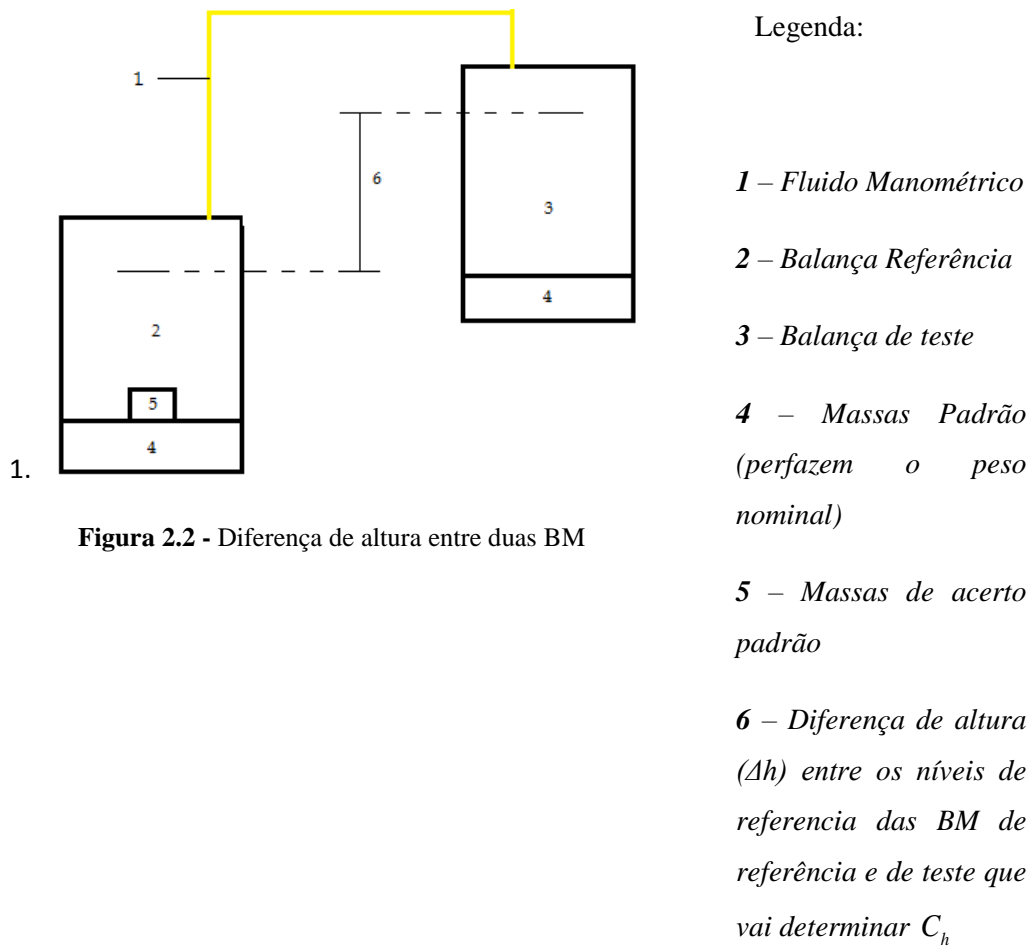


Figura 2.2 - Diferença de altura entre duas BM

Pode-se dar o caso de as massas M_i fornecidas no Certificado de Calibração não serem os valores das massas reais, mas sim o valor das massas convencionais, nesse caso têm de ser considerados os contributos das massas volúmicas das massas e da massa volúmica do ar. A pressão fica definida por (2.4):

$$P = \frac{\sum m_{ci} \cdot g \cdot \left(1 - \frac{\rho_{0a}}{\rho_0} + \frac{\rho_{0a} - \rho_a}{\rho_{mi}}\right)}{A_p \cdot [1 + (\alpha_p + \alpha_c) \cdot (t - t_r)]} + C_h \quad (2.4)$$

Onde:

m_{ci} – Valor da massa convencional dos pesos aplicados no pistão, incluindo os outros elementos flutuantes (sino, massas, massas de acerto, etc..)

ρ_{0a} – Valor convencional da massa volúmica do ar, $\rho_{0a} = 1.2 \text{ kg/m}^3$

ρ_{mi} – Valor convencional da massa volúmica das massas, $\rho_{mi} = 8000 \text{ kg/m}^3$

ρ_0 – Valor da massa volúmica do ar medido em cada patamar de calibração.

2.2.1. Funcionamento a Gás

No caso das balanças manométricas que trabalham a gás geralmente o fluido usado é o azoto (N_2).

Neste caso não é necessário contabilizar o efeito da tensão superficial (Γ).

A pressão fica então como em (2.5):

$$P = \frac{M \cdot g}{A_p \cdot [1 + (\alpha_p + \alpha_c) \cdot (T - 20)]} + C_h \quad (2.5)$$

Em que:

n – É o numero molar das moléculas do gás manométrico. Que toma o valor de 0,0280135 quando se trata de Azoto.

R – É a constante dos gases ideais ($R = 8,3144$)

P_a – Pressão Atmosférica

$$C_h = \rho_{Gás} \cdot g \cdot \Delta h - P_a \quad (2.5a)$$

$$\rho_{Gás} = \frac{P \cdot n_{Gás}}{\Delta T \cdot R} \quad (2.5b)$$

2.2.2. Funcionamento a Óleo

No caso das balanças que trabalham com óleo, tem de ser contabilizado o efeito da tensão superficial (Γ), Fica então como (2.6):

$$P = \frac{M \cdot g + \Gamma \cdot C}{A_p \cdot [1 + (\alpha_p + \alpha_c) \cdot (T - 20)]} + C_h \quad (2.6) \quad \text{Em que:}$$

$$C_h = \rho_{\text{óleo}} \cdot g \cdot \Delta h \quad (2.6a)$$

β_ϵ – Coeficiente de expansão do liquido,
 $\beta(\text{liq})$.

$$\rho_{\text{óleo}} = \rho_{0\text{óleo}} + \beta_\epsilon \cdot \Delta T + z \cdot P \quad (2.6b)$$

z – Coeficiente de compressibilidade, z
 (liq) .

2.2.3. Relação entre A_0 e λ

Depois de calculada a área efetiva da balança de teste (A_p), está-se em condições de calcular a área efetiva à pressão de referência (A_0) e o coeficiente de distorção (λ), através da relação da equação (1.1):

$$A_p = A_0 \cdot (1 + \lambda \cdot P)$$

Como é necessário determinar dois parâmetros (A_0) e (λ) e só temos uma equação, o sistema é indeterminado.

Contudo, como se tem uma população de valores de pressão e da Área efetiva recorre-se a modelos estatísticos de regressão que nos vão permitir determinar então uma aproximação dos valores pretendidos.

É exatamente neste desafio que consiste todo o substrato do tema desta dissertação, e que será abordado mais pormenorizadamente ao longo deste relatório.

2.2.4. Tipos de Grandezas de Influencia

É necessário introduzir um conceito importante que vai ser útil para a compreensão da aplicação de alguns modelos abordados mais a frente.

Existem dois tipos de grandezas na calibração, são elas: As grandezas de saída ou mensuradas (Y), que são as grandezas submetidas á medição, e que por sua vez vão depender de um certo número de grandezas de entrada, em que $X_i = (i=1,2,\dots,N)$, de acordo com a relação funcional $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$ [4]

A função f modela o procedimento de medição e o método de avaliação, descreve como os valores da grandeza de saída Y são obtidos a partir das grandezas de entrada X_i [4].

2.2.5. Coeficiente de Sensibilidade

O coeficiente de sensibilidade c_i descreve como a estimativa da grandeza de saída y é influenciada pelas variações de cada uma das estimativas das grandezas de entrada X_i . Pode ser avaliada de acordo com a função f pela equação (2.7) [4]

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial X_i} \quad (2.7)$$

2.2.6. Incertezas do Tipo A e Tipo B

Após o calculo dos parâmetros A_0 e λ , interessa saber como calcular as suas incertezas.

Existem dois tipos de incertezas, a do Tipo A e do Tipo B. A avaliação do tipo A é o método de avaliação da incerteza pela análise estatística de uma série de observações. Neste caso, a incerteza padrão é o desvio-padrão experimental da média ou de uma análise de regressão apropriada. A avaliação do tipo B é o método de avaliação de incerteza por outros meios que não a da análise estatística de séries de observações, a estimativa da incerteza-padrão, é baseada noutro conhecimento científico proveniente de seguintes fontes [4]:

- Dados de medições prévias;
- Experiência de/ou conhecimento geral do comportamento e propriedades físicas de materiais e instrumentos relevantes;
- Especificações de fabricantes;
- Dados provenientes de calibração e outros certificados;
- Incertezas provenientes de manuais.

As incertezas do tipo A e do tipo B vão contribuir para uma incerteza total no valor final, de acordo com a equação (2.8)

$$u_{AB} = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} \quad (2.8) \quad \text{Sendo:}$$

u_A – A incerteza do tipo A

u_B – A incerteza do tipo B

As incertezas do tipo B são obtidas numericamente substituindo os N valores de cada incerteza $u(X_i)$ associada a cada N grandeza de entrada (X_i) na função $f(X)$. Feito isso, a função $f(X)$, em que são gerados os valores de saída (Y), passa a gerar os valores das incertezas do tipo B $u(Y_i)$.

2.3. Métodos Estatísticos Utilizados

Como foi referido, foram 15 os países que participaram neste estudo, representados pelos LNM europeus correspondentes. Cada um deles, fez a sua abordagem numérica ao estudo, conduzindo assim a resultados diferentes. Como é evidente, as abordagens foram feitas com recurso a conhecimentos matemáticos de probabilidade e estatística, adaptados a este caso em concreto da calibração das BM.

Começa-se por relembrar os conceitos básicos de como calcular a média \bar{x} (2.9), a variância V (2.10) e o desvio padrão σ (2.11), cujas equações são as seguintes:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.9)$$

$$V = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (2.10)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{V}{N}} \quad (2.11)$$

Contudo é necessário saber as bases dos métodos, para se poder entender melhor as bases que servem de alicerces à validade dos resultados obtidos.

O objetivo da aplicação dos métodos estatísticos é fazer a aproximação de uma reta que traduza a equação (1.1). Reta essa que seja definida pelas áreas efetiva para cada ponto de pressão.

Os resultados de A_0 e λ são deste modo obtidos através da reta que minimiza a distancia χ (figura 2.3) de cada ponto á reta de regressão, cuja equação corresponderá á relação dada por (1.1):

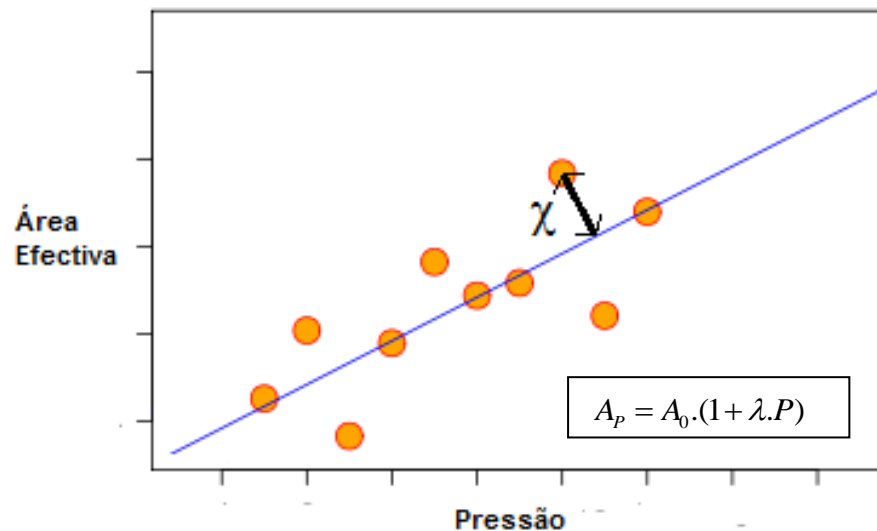


Figura 2.3 - Reta de regressão linear

Não se vai entrar em noções matemáticas que se afastem do âmbito desta dissertação.

2.3.1. Método dos Mínimos Quadrados (OLS)

É necessário estimar valores de determinada variável y . Para isso, considera-se os valores de outra variável x que se acredita ter influência sobre y conforme a equação (2.12)

$$y = a + bx + e \quad (2.12)$$

onde:

- a - Parâmetro do modelo chamado de constante (por não depender de x), que se calcula com (2.14).
- b - Parâmetro do modelo chamado de coeficiente da variável x , que se calcula de acordo com (2.13).
- e - Erro associado à reta.

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (2.13)$$

E:

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad (2.14)$$

2.3.2. Método dos Mínimos Quadrados com o primeiro valor excluído

Este método é semelhante ao (OLS), com a diferença de se excluir o valor de y que mais foge da média. Isto significa que dada a equação (2.12):

$$y = a + bx + e$$

Com $[y_1, \dots, y_{N-1}]$

Determina-se o valor que mais vai contribuir para o erro, que será o máximo do quadrado dos desvios dos elementos (2.15):

$$Max(\sigma_i^2) = Max[(y_1 - \bar{y})^2, (y_2 - \bar{y})^2, \dots, (y_N - \bar{y})^2] \quad (2.15)$$

Assim o número total de elementos N fica reduzido a N-1 elementos.

Contudo, como se irá ver mais adiante, na prática, para o caso da calibração de BM, o valor excluído é exatamente o primeiro ponto de pressão, e não o máximo dos desvios.

2.3.3. Método dos Mínimos Quadrados Ponderados (WLS)

Quando os erros não estão correlacionados e também têm uma variância diferente uns dos outros, é possível determinar a sua ponderação. [5]

Dada a equação (2.16):

$$Y = X\beta + e \quad (2.16)$$

No caso do OLS, a matriz de covariância dos erros é simples, e tem a forma:

$$V(e) = \begin{pmatrix} \sigma_e^2 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_e^2 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & & \dots & \\ \dots & \dots & & \ddots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \sigma_e^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \sigma_e^2 \end{pmatrix} = \sigma_e^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & & \dots & \\ \dots & \dots & & \ddots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mas como a variância dos erros não é a mesma (Heteroscedasticidade), implica que os elementos da diagonal sejam diferentes [6]:

$$V(e) = \begin{pmatrix} \sigma_{e1}^2 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{e2}^2 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & & \dots & \dots \\ \dots & \dots & & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \sigma_{e(N-1)}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \sigma_{eN}^2 \end{pmatrix}$$

Neste método os estimadores σ_e^2 são usados como ponderações da variância tal como mostra a expressão (2.17).

$$S(\hat{\beta}) = \sum_{i=0}^N \frac{1}{\sigma_e^2} \left(y_i - \hat{y}_i \right)^2 = \sum_{i=0}^N w_i \left(y_i - \hat{y}_i \right)^2 \quad (2.17)$$

Fica-se agora com a relação (2.18):

$$\begin{aligned} S(\hat{\beta}) &= \sum_{i=0}^N w_i \left(y_i - \hat{y}_i \right)^2 = \sum_{i=0}^N \left(\sqrt{w_i} y_i - \sqrt{w_i} \hat{y}_i \right)^2 \\ &= w_1 \left(y_1 - \hat{y}_1 \right)^2 + w_2 \left(y_2 - \hat{y}_2 \right)^2 + \dots + w_N \left(y_N - \hat{y}_N \right)^2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Assim sendo, obtemos então, o fator ponderativo da fórmula.

2.3.4. Método dos Mínimos Quadrados Generalizados (GLS)

Este método aplica-se quando y não tem uma matriz de covariância escalar, a variância dos erros não é a mesma (Heteroscedasticidade), ou quando há uma correlação entre as observações. Ou seja, dada a função (2.16) $Y = X\beta + e$

Em que β é agora um vetor desconhecido que só pode ser estimado através da população a estudar. Supõe-se então que b é um valor possível estimado por β . Assim o vetor residual de b irá ser: $Y - Xb$ [7]. O Método dos mínimos quadrados gerais, estima β de forma a minimizar o quadrado dos valores residuais do vetor descrito em (2.19) [8].

$$\hat{\beta} = \arg \min (Y - Xb)' \times V^{-1} \times (Y - Xb) \quad (2.19)$$

E V será a variancia de Y (2.20):

$$V = \text{Var} (Y) \quad (2.20)$$

Onde V é uma matriz que não pode ser escrita como $\sigma_0^2 I_T$ para qualquer número de σ_0^2 . Isto significa que os valores de y podem não variar sempre ou mesmo estarem correlacionados [6].

$$V(y) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & Cov(e_1, e_2) & \dots & \dots & \dots & Cov(e_1, e_N) \\ Cov(e_1, e_2) & \sigma_2^2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \sigma_{N-1}^2 & Cov(e_1, e_{N-1}) \\ Cov(e_1, e_N) & \dots & \dots & \dots & Cov(e_1, e_{N-1}) & \sigma_N^2 \end{pmatrix}$$

Sendo o objetivo a forma quadrática em b , assim, o estimador β tem a forma (2.21) [9].

$$\beta = (X' V^{-1} X)^{-1} X' V^{-1} Y \quad (2.21)$$

2.3.5. Modelo (A_0, λ, F)

As bases teóricas deste modelo são desconhecidas, uma vez que se trata de um modelo desenvolvido por um dos laboratórios de metrologia, exclusivamente desenvolvido para o caso concreto da calibração das balanças manométricas.

Foram divulgadas algumas considerações tomadas para o desenvolvimento deste modelo, mas as suas bases matemáticas são do conhecimento restrito dos seus autores.

Existe, porem, uma explicação científica aplicada do método, que não poderá ser aprofundada devido a direitos de autor.

Capítulo 3

Comparação Realizada no Estudo EURAMET

Tal como foi referido, quinze LNM de diferentes países, compararam os seus métodos estatísticos aplicados, na calibração de balanças manométricas, determinando os parâmetros A_0 e λ da área efetiva. Na tabela 3 indicam-se os países participantes na comparação e o método escolhido por cada um.

Tabela 3.1 - Métodos aplicados por cada LNM

LNM's	País de origem	Método utilizado
BEV	Áustria	OLS
CEM	Espanha	OLS
EIM	Grécia	OLS
DANIamet	Dinamarca	WLS
FSB-LPM	Croácia	OLS
IMBiH	Bósnia	OLS
IMT	Eslovénia	OLS
INRIM	Itália	GLS
IPQ	Portugal	OLS
LNE	França (laboratório piloto)	GLS
METAS	Suíça	OLS – <i>First Value Excluded</i>
MIKES	Finlândia	OLS
MKEH	Hungria	OLS
PTB	Alemanha	A_0, λ, F -model
UME	Turquia	WLS

Os métodos utilizados para estimar estes parâmetros e as respetivas incertezas foram aplicados a 4 casos de calibração diferentes cujos dados foram obtidos por simulação. Cada caso era constituído por 5 ciclos de medições diferentes [10].

Esses 4 casos estão divididos em: dois casos numa BM a gás (*Azoto*) e os outros dois casos numa balança a óleo (*Sebacate*), que simulam duas condições ambientais de calibração diferentes.

Neste relatório, opta-se por detalhar apenas o caso 2 da balança a óleo, por uma questão de objetividade. Tanto o caso 1 referente á balança de óleo, como os outros dois casos referentes á balança de gás têm uma abordagem semelhante.

Nesta comparação, EURAMET Project 1125, foi avaliada a qualidade dos métodos em robustez e capacidade na estimativa de incertezas dos parâmetros.

A comparação entre um padrão e o instrumento de medição em teste (neste caso ambas BM) é o método mais comum usado na calibração, onde são determinadas as áreas efetivas (A_p) referentes á temperatura de 20 ° C do conjunto pistão-cilindro da BM de teste, em função da pressão gerada na BM de referência. Depois de se ter calculado e analisado as áreas efetivas (A_p), vai se então realizar o cálculo da área efetiva á pressão de referência (A_0), e do coeficiente de distorção (λ).

Existem várias abordagens diferentes no cálculo destes parâmetros e das suas incertezas associadas., o que levou a uma diferença significativa nos resultados obtidos pelos diferentes LNM, embora partindo dos mesmos dados.

Como resposta a esta constatação, foi necessário efetuar uma segunda repetição (2º *loop*), com o objetivo de comparar numericamente apenas as características e resultados de cada método.

3.1. Dados Iniciais Fornecidos para a Comparação

Os dados fornecidos para a comparação são os mesmos, tanto para o primeiro *loop*, como para o segundo *loop*. Sendo que no segundo foram fornecidos os valores da pressão, área efetiva e sua incerteza, como será explicado.

Começa-se então por abordar o 1º *loop*, em que são fornecidas as condições teóricas na calibração que também são válidas para o 2º *loop*. Foi fornecido a todos os LNM toda a informação e valores necessários para a comparação, bem como as respectivas incertezas.

De modo a obter-se os valores “simulados”, foram arbitrados valores teóricos da área efetiva á pressão de referência A_{0c_th} , e do coeficiente de distorção λ_{c_th} da balança de teste (Tabela 3.2), considerados como sendo os verdadeiros (sem qualquer incerteza associada).

Tabela 3.2 - Tabela dos valores teóricos da BM de teste

Fluido	Caso	$A_{0c_th} (mm^2)$	$\lambda_{c_th} (Pa^{-1})$
Óleo (Sebacate)	Caso 2	1,90292	$7,80 \cdot 10^{-13}$

Depois de se terem definido os valores de referência (tabela 3.2), foram geradas as condições de calibração usando o software Analysis Toolpak® (gerador de números aleatórios) [10].

3.1.1. Parâmetros das Massas

A BM a óleo, cuja gama de valores varia entre (5 a 500) MPa, foi testada em diferentes valores de pressão nominal [10].

No caso da balança de óleo as massas são constituídas por:

- Massa do sino
- Massa do Pistão
- Massa de 4 Kg
- 19 Massas de 5 Kg (massas de 1 á 19)

A sua aplicação é a descrita na tabela 3.3:

Tabela 3.3 - Massas utilizadas/cada ponto de pressão BM de teste a óleo

Pressão Nominal	Massa total Nominal	Massas usadas
<i>KPa</i>	<i>Kg</i>	
5	1,0	massa do sino + massa do pistão
50	10,0	massa do sino + massa do pistão + massa de 4 kg + massa 1
100	20,0	massa do sino + massa do pistão + massa de 4 kg + massa 1 + massa 2 + massa 3
150	30,0	massa do sino + massa do pistão + massa de 4 kg + massa 1 + massa 2 + massa 3 + massa 4 + massa 5
200	40,0	massa do sino + massa do pistão + massa de 4 kg + massa 1 + massa 2 + massa 3 + massa 4 + massa 5 + massa 6 + massa 7
250	50,0	massa do sino + massa do pistão + massa de 4 kg + massa 1 + massa 2 + massa 3 + massa 4 + massa 5 + massa 6 + massa 7+ massa 8 + massa 9
300	60,0	massa do sino + massa do pistão + massa de 4 kg + massa 1 + massa 2 + massa 3 + massa 4 + massa 5 + massa 6 + massa 7+ massa 8 + massa 9 + massa 10 + massa 11
350	70,0	massa do sino + massa do pistão + massa de 4 kg + massa 1 + massa 2 + massa 3 + massa 4 + massa 5 + massa 6 + massa 7+ massa 8 + massa 9 + massa 10 + massa 11+ massa 12 + massa 13
400	80,0	massa do sino + massa do pistão + massa de 4 kg + massa 1 + massa 2 + massa 3 + massa 4 + massa 5 + massa 6 + massa 7+ massa 8 + massa 9 + massa 10 + massa 11+ massa 12 + massa 13 + massa 14 + massa 15
500	100,0	massa do sino + massa do pistão + massa de 4 kg + massa 1 + massa 2 + massa 3 + massa 4 + massa 5 + massa 6 + massa 7+ massa 8 + massa 9 + massa 10 + massa 11+ massa 12 + massa 13 + massa 14 + massa 15 + massa 16 + massa 17 + massa 18 + massa 19

3.1.2. Parâmetros Gerais

São colocadas massas simultaneamente na balança de referência e na de teste (tabela 3.4).

Tabela 3.4 - Condições atmosféricas

Quantidade	Valor	Incertezas
Temperatura do Laboratório (T)	20,0 °C	As incertezas destes parâmetros não foram consideradas.
Gravidade local (g)	9,809273 m.s ⁻²	
Soma dos coeficientes de expansão térmica (α_p e α_c) (Considerados iguais para as balanças de referencia e de teste)	9,0x10 ⁻⁶ °C ⁻¹	

Para cada tipo de balança foram gerados dois conjuntos de parâmetros diferentes, devido á variante da balança de gás ou de óleo. Sendo o caso aqui representado o de óleo, as características do fluido manométrico estão representados na tabela 3.5

Tabela 3.5 - Características do fluido manométrico

Parâmetro	Óleo (liquido)
Massa volúmica do fluido manométrico (ρ_0)	912,5 kg.m ⁻³
Coeficiente de expansão (β_c)	0,714 kg.m ⁻³ .°C ⁻¹
Coeficiente de compressibilidade (z)	4,0x10 ⁻⁷ kg.m ⁻³ .Pa ⁻¹
Tensão superficial do óleo (Γ)	0,0311 N.m ⁻¹

Todos os cálculos têm de considerar a dependência entre o fluido manométrico, a pressão e a temperatura. As incertezas associadas às massas volúmicas não foram consideradas neste projeto.

3.1.3. Parâmetros Específicos da Balança de Óleo

Na balança a óleo, os fatores que influenciam os resultados são os mesmos que influenciaram a BM a gás.

Começa-se então pela tabela 3.6 que mostra os parâmetros da BM de referência neste caso 2.

Tabela 3.6 - Parâmetros do conjunto pistão-cilindro da balança de referência a óleo

Designação	Valor nominal	Valores associados á balança de referência	Incertezas
A_0	1,9 mm ²	1,903100 mm ²	$1,0 \times 10^{-5} \cdot A_0$
λ	$7,8 \times 10^{-13} \text{ Pa}^{-1}$	$7,43 \times 10^{-13} \text{ Pa}^{-1}$	5 %
Nível de referência na balança de teste	-	50 mm	1 mm
Nível de referência na balança de referência		29 mm	1 mm

Na tabela 3.7 estão discriminados os parâmetros associados às massas utilizadas na balança a óleo para o caso 2.

Tabela 3.7- Características das massas do caso 2 da BM de referência a óleo

Designação	Valor nominal	Massa volúmica	Valores convencionais associados á balança de teste	Valores convencionais associados á balança de referência	Incertezas
	<i>Kg</i>	<i>kg.m⁻³</i>	<i>Kg</i>	<i>Kg</i>	<i>mg</i>
Sino	0,8	5058	0,8000009	0,7999840	2,5
Pistão	0,2	8030	0,1999987	0,1999997	1,3
Massa 4 kg	4	7920	3,9999804	4,0000172	3,6
Massa 1 (5 kg)	5	7920	5,0000143	5,0000231	4,6
Massa 2 (5 kg)	5	7920	5,0000241	5,0000130	4,6
Massa 3 (5 kg)	5	7920	5,0000130	5,0000113	4,6
Massa 4 (5 kg)	5	7920	4,9999792	4,9999924	4,6
Massa 5 (5 kg)	5	7920	4,9999826	5,0000119	4,6
Massa 6 (5 kg)	5	7920	5,0000131	5,0000272	4,6
Massa 7 (5 kg)	5	7920	4,9999930	5,0000045	4,6
Massa 8 (5 kg)	5	7920	4,9999438	5,0000381	4,6
Massa 9 (5 kg)	5	7920	4,9999809	5,0000537	4,6
Massa 9 (5 kg)	5	7920	4,9999802	5,0000294	4,6
Massa 10 (5 kg)	5	7920	4,9999921	4,9999732	4,6
Massa 11 (5 kg)	5	7920	5,0000076	5,0000081	4,6
Massa 12 (5 kg)	5	7920	4,9999913	5,0000207	4,6
Massa 13 (5 kg)	5	7920	5,0000023	5,0000707	4,6
Massa 14 (5 kg)	5	7920	5,0000007	4,9999862	4,6
Massa 15 (5 kg)	5	7920	4,9999884	5,0000025	4,6
Massa 16 (5 kg)	5	7920	4,9999819	5,0000007	4,6
Massa 17 (5 kg)	5	7920	5,0000087	4,9999995	4,6
Massa 18 (5 kg)	5	7920	5,0000023	5,0000081	4,6
Massa 19 (5 kg)	5	7920	0,8000009	0,7999840	2,5

Na tabela 3.8 estão discriminados massas adicionais, massas de ajuste, aplicadas na BM de referência

Tabela 3.8 - Massas adicionais aplicadas na BM de referência

Pressão nominal	m_{Ciclo 1}	m_{Ciclo 2}	m_{Ciclo 3}	m_{Ciclo 4}	m_{Ciclo 5}
<i>Mpa</i>	<i>Mg</i>	<i>mg</i>	<i>mg</i>	<i>Mg</i>	<i>mg</i>
5	220	220	220	220	160
50	1100	1100	1200	1000	1100
100	1800	2400	2400	1950	1950
150	2800	3600	3200	2400	3200
200	4250	4750	4750	3250	4250
250	4500	5700	5400	4500	4800
300	5950	6650	5950	5250	5950
350	6400	8400	8000	5600	6800
400	8100	9000	8550	6750	7200
500	10450	11000	10450	8800	9350

(As massas volúmicas das massas adicionais = 7920 kg/m³)

Na tabela 3.9 estão discriminadas as pressões atmosféricas de cada ciclo.

Tabela 3.9 - Pressão atmosférica em cada ciclo

		P_{Ciclo 1}	P_{Ciclo 2}	P_{Ciclo 3}	P_{Ciclo 4}	P_{Ciclo 5}	Incerteza
Pressão atmosférica	hPa	1003,45	1001,79	999,39	1001,18	988,41	0,30

A tabela 3.10 apresenta as temperaturas da balança de referência.

Tabela 3.10 - Temperaturas do conjunto pistão-cilindro da BM de referência

Pressão Nominal	T_{Ciclo 1}	T_{Ciclo 2}	T_{Ciclo 3}	T_{Ciclo 4}	T_{Ciclo 5}	Incerteza
<i>MPa</i>	°C	°C	°C	°C	°C	°C
5	21,53	22,79	22,31	21,55	21,94	0,10
50	21,53	22,77	22,28	21,51	21,88	0,10
100	21,52	22,85	22,28	21,51	21,98	0,10
150	21,52	22,82	22,34	21,57	21,87	0,10
200	21,50	22,82	22,33	21,56	21,92	0,10
250	21,48	22,79	22,35	21,53	21,85	0,10
300	21,50	22,83	22,29	21,61	21,97	0,10
350	21,36	22,72	22,33	21,61	21,94	0,10
400	21,51	22,76	22,37	21,50	21,89	0,10
500	21,60	22,78	22,31	21,61	21,96	0,10

Por fim, neste ultimo caso, apresentam-se as temperaturas da balança de teste a óleo (tabela 3.11).

Tabela 3.11- Temperaturas do conjunto pistão-cilindro da BM de teste

Pressão Nominal	T_{Ciclo 1}	T_{Ciclo 2}	T_{Ciclo 3}	T_{Ciclo 4}	T_{Ciclo 5}	Incerteza
<i>MPa</i>	°C	°C	°C	°C	°C	°C
5	21,12	20,08	20,74	22,53	21,45	0,10
50	21,08	20,09	20,78	22,57	21,51	0,10
100	21,10	20,01	20,75	22,56	21,47	0,10
150	21,10	20,13	20,69	22,54	21,40	0,10
200	21,10	20,15	20,68	22,45	21,57	0,10
250	21,09	20,09	20,80	22,59	21,42	0,10
300	21,19	20,10	20,78	22,57	21,46	0,10
350	21,13	20,09	20,76	22,60	21,46	0,10
400	21,11	20,00	20,71	22,49	21,50	0,10
500	21,17	20,15	20,68	22,51	21,37	0,10

3.1.4. Dados Fornecidos para o 2º Loop

Devido á diferença entre os valores das incertezas dos parâmetros A_0 e λ , houve a necessidade de realizar um segundo *loop*, que consistia em focar a atenção somente na determinação da área efetiva á pressão de referência (A_0) e do coeficiente de distorção (λ).

Para tal, foram gerados os seguintes valores apresentados na tabela 3.12, contendo, para cada ponto de pressão os valores da área efetiva A_p da balança de teste, valores esses que no primeiro loop, tinham de ser determinados pelos respectivos LNM, o que causa uma desnecessária dispersão nos resultados antes da aplicação dos métodos numéricos. Tais dados, vão permitir que se estudem os vários métodos numéricos partindo dos mesmos valores iniciais para todos os LNM [10].

Tabela 3.12 - Dados fornecidos para o loop 2 da BM de óleo

Óleo		
Pressão nominal	Caso 2	
MPa	A_p	$u(A_p)$
	mm ²	mm ²
5,16	1,90283	6,3E-05
51,55	1,90298	2,9E-05
103,1	1,90307	0,00003
154,65	1,90315	2,8E-05
206,19	1,90322	0,00003
257,74	1,9033	3,2E-05
309,29	1,90338	3,5E-05
360,84	1,90345	3,7E-05
412,38	1,90353	0,00004
515,48	1,90368	4,8E-05

Os valores das incertezas da área efetiva da balança de teste $u(A_p)$ já contabilizam as incertezas do tipo A e do tipo B conjugadas.

3.2. Resultados

Os resultados do primeiro *loop*, no que refere ao cálculo da área efetiva à pressão de referência (A_0), do coeficiente de distorção (λ) e das suas incertezas associadas. ($u(A_0)$ e $u(\lambda)$), revelaram-se diferentes.

Chegada a esta conclusão, como foi referido, efetuou-se uma segunda repetição (2º *loop*), com o objetivo de fazer um levantamento e comparar apenas as características e os resultados da aplicação de cada método.

Apresentam-se de seguida os resultados obtidos no 2º *loop*, por cada um dos LNM participantes, relativamente ao caso 2 da balança a óleo, tabela 3.13.

Tabela 3.13 - Resultados dos LNM para o caso 2 a óleo

LNMs	A_0 (mm²)	u_{A0} (mm²)	λ (Pa⁻¹)	u_λ (Pa⁻¹)
BEV	1.902881	0.000033	8.36×10^{-13}	8.0×10^{-14}
CEM	1.902881	0.000030	8.36×10^{-13}	4.4×10^{-14}
EIM	1.902881	0.000046	8.35×10^{-13}	8.4×10^{-14}
DANIAmet	1.902911	0.000010	7.90×10^{-13}	1.6×10^{-14}
FSB-LPM	1.902920	0.000047	8.36×10^{-13}	4.2×10^{-14}
IMBiH	1.902881	0.000050	8.35×10^{-13}	9.3×10^{-14}
IMT	1.902881	0.000050	8.35×10^{-13}	9.3×10^{-14}
INRIM	1.902911	0.000021	7.90×10^{-13}	4.2×10^{-14}
IPQ	1.902881	0.000016	8.61×10^{-13}	4.3×10^{-14}
LNE	1.902952	0.000019	7.33×10^{-13}	2.1×10^{-14}
METAS	1.902911	0.000029	7.89×10^{-13}	4.0×10^{-14}
MIKES	1.902881	0.000050	8.36×10^{-13}	9.2×10^{-14}
MKEH	1.902881	0.000060	8.36×10^{-13}	2.9×10^{-14}
PTB	1.902919	0.000022	7.80×10^{-13}	2.9×10^{-14}
UME	1.902901	0.000029	8.07×10^{-13}	5.7×10^{-14}

Os gráficos que retratam os resultados da área efetiva á pressão nula e do coeficiente de distorção estão representados respetivamente nas figuras 3.1 e 3.2.

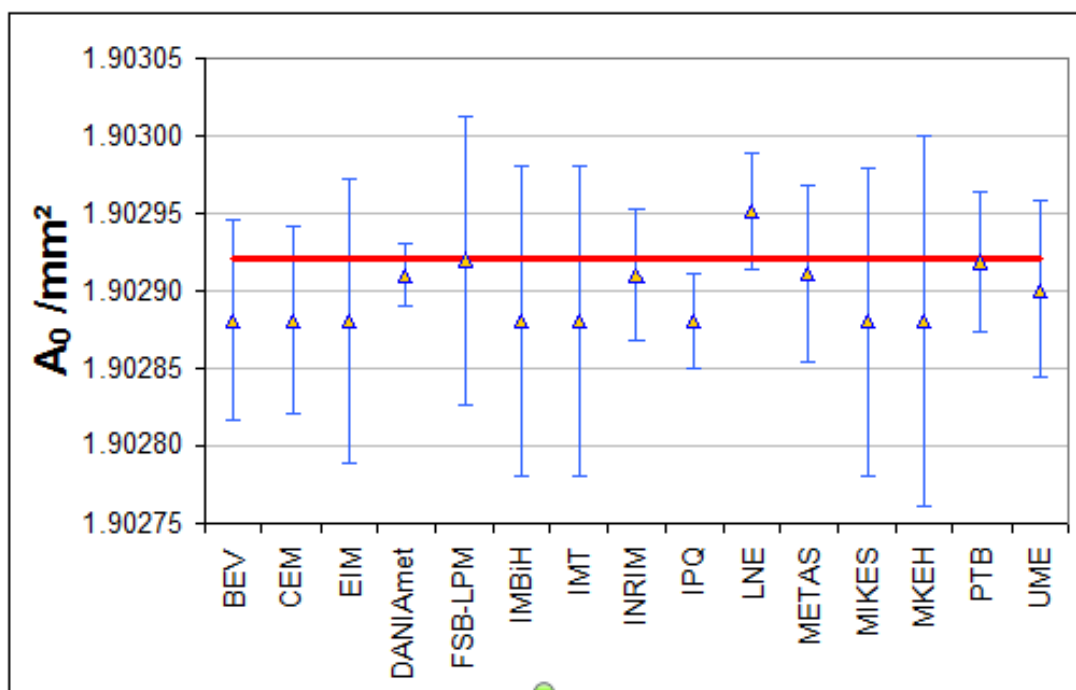


Figura 3.1 - Gráfico dos A_0 obtidos pelos LNM para o caso 2 a óleo

O gráfico da área efetiva à pressão de referência (A_0) de uma balança a óleo (caso 2) calculada pelos vários LNM, compara o valor teórico de A_0 , (representado na linha horizontal), com os vários valores da área efetiva, determinadas pelos diferentes LNM. As linhas verticais são as incertezas totais (tipo A somadas com a do tipo B), dadas pelos LNM, (exceto o IPQ que considerou somente as incertezas do tipo A), correspondendo a duas vezes os valores na tabela 3.13.

A semelhança do gráfico acima, (área efetiva à pressão de referência), o gráfico 3.2 (gráfico dos λ obtidos pelos LNM para o caso 2 a óleo), segue a mesma lógica de interpretação, com a diferença de agora se tratar do coeficiente de distorção (λ) em vez da área efetiva à pressão de referência (A_0).

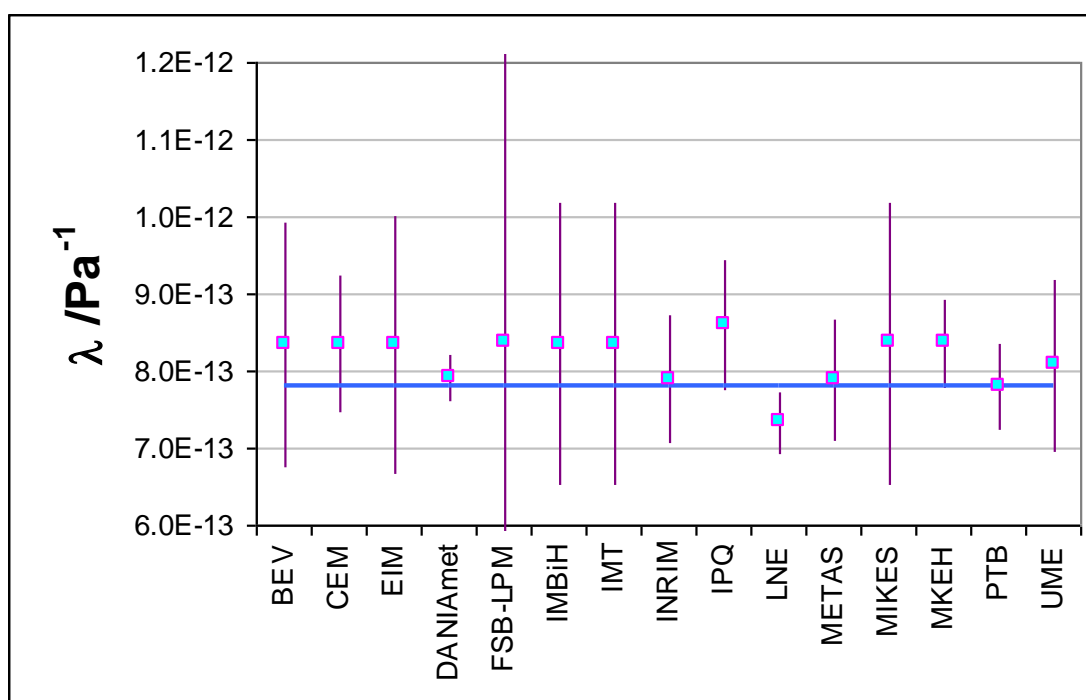


Figura 3.2 - Gráfico dos λ obtidos pelos LNM para o caso 2 a óleo

3.3. Discussão

A primeira conclusão que se tirou da análise destes resultados, é que, todos os valores das áreas efetivas (A_p) determinados pelos diferentes métodos aplicados pelos participantes, estavam de acordo com o valor teórico. Contudo, as incertezas associadas $u(A_p)$ diferiam ligeiramente dependendo do método usado [10].

No que diz respeito aos parâmetros da área efetiva, a situação é semelhante. Os valores obtidos no cálculo da área efetiva à pressão de referência (A_0) estão de acordo com o valor de referência. A sua incerteza $u(A_0)$ também difere significativamente de método para método. E no que toca ao coeficiente de distorção (λ), a situação é equivalente. Está dentro dos valores aceitáveis para o valor de referência e a sua incerteza associada também difere significativamente.

Recomenda-se assim que, quando as incertezas dos respetivos parâmetros da área efetiva forem declaradas em certificados de calibração, sejam calculadas com o método mais adequado.

A segunda conclusão foi relativamente à robustez dos métodos, em que foi avaliado o desvio que ocorre entre os parâmetros determinados e os seus valores teóricos.

Como se sabe, este estudo, (Euramet Project 1125), contempla mais 1 caso na balança a óleo e dois casos noutra balança funcionando a gás. Os resultados obtidos foram representados em diagramas de Youden, e foram determinados fazendo o desvio relativo entre os dois casos de cada tipo de balança, considerando só os pontos de pressão mais elevada [11]. Nesse estudo comparativo mais aprofundado foi possível retirar-se as seguintes conclusões adicionais:

- O método mais comum, OLS, fornece os resultados menos robustos [10].
- O método OLS *first value excluded* apresenta melhores resultados por exclusão do primeiro ponto de pressão.
- WLS considera uma ponderação dos fatores tendo em conta as incertezas da área efetiva. Este método providencia assim resultados mais exatos que os dois anteriores.
- Os valores obtidos usando o método GLS utilizado pelo INRIM e o LNE são praticamente iguais e são mais exatos que o OLS e o WLS

O método desenvolvido pelo PTB será uma alternativa ao GLS pois providencia valores com um nível de exatidão semelhante.

Capítulo 4

Aplicação dos Métodos Estatísticos

No capítulo anterior analisaram-se os resultados obtidos no estudo comparativo “Euramet Project 1124” para um dos casos da BM a óleo. Neste capítulo irão ser descritas em pormenor as aplicações de cada método matemático utilizado pelos vários LNM.

Os métodos estatísticos irão utilizar esta configuração de valores gerados na calibração de Balanças Manométricas.

O desenvolvimento matemático necessário para a explicação destes métodos pode, nalguns casos, ser longa e complexa e por uma questão de objetividade não será aqui abordada.

Usando o método de comparação, em situação de equilíbrio entre duas BM, medindo a mesma pressão, trabalhando com o valor da massa real (M_i), já corrigido pelo efeito da massa volúmica do ar, usando as características da BM de referência e adicionando a correção devida à diferença de altura entre os níveis de referência temos:

$$P_j = \frac{\sum_i M_i \cdot g \cdot \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_{m_i}}\right) + \Gamma \cdot C}{A_p \cdot [1 + \alpha \cdot (T_i - T_r)]} + C_h \quad (4.1)$$

Para cada ponto de calibração referenciado como j , correspondendo a um total de massas $\sum M_i$. A pressão de referência P_j é então gerada pela BM de referência ao nível de referência da BM em teste [12].

Portanto, a partir de cada ponto de pressão P_j , podemos determinar para a BM em teste, as Áreas efetivas A_{p_j} , correspondentes a cada ponto de pressão á temperatura de referência T_r (20 °C), recorrendo à equação 4.2.

$$A_{p_j} = \frac{\sum_i M_{ij} \cdot g \cdot \left(1 - \frac{\rho_{a_j}}{\rho_{m_{ij}}}\right) + \Gamma \cdot c}{P_j \cdot [1 + \alpha \cdot (T_j - T_r)]}, \quad (4.2)$$

Em que $\sum_i M_j$ é o valor correspondente à massa total, T_j a temperatura, e α_p , α_c , ρ_{mij} , são as características da balança em teste, ρ_{aj} é a massa volúmica do ar, sendo todos os valores de índice j referentes a cada ponto de pressão.

Sendo este caso constituído por cinco ciclos de medidas, houve necessidade de se proceder à média dos cinco ciclos de geração de valores, para cada um dos patamares de pressão.

Posto isto, está-se em condições de prosseguir para o cálculo da área efetiva à pressão de referência (A_0) e do coeficiente de distorção (λ). Para isso vai ser necessário recorrer á equação (1) e como já explicado anteriormente, recorrer a métodos estatísticos na determinação dos fatores A_0 e λ .

4.1. Método dos Mínimos Quadrados Ordinários (OLS)

Este método vem descrito no guia de calibração “*EURAMET cg-3v Pressure Balance*” com a adaptação a este caso em concreto de calibração de balanças manométricas.

Pode-se aplicar este método considerando que a área efetiva $A_p(p)$ é uma função linear da pressão [12].

Com base no guia “*EURAMET cg-3v Pressure Balance*” sabe-se que é possível determinar A_0 e λ recorrendo as seguintes equações 4.3 e 4.4.

$$A_0 = \frac{\sum P_j^2 \cdot \sum A_{p_j} - \sum P_j \cdot \sum (P_j \cdot A_{p_j})}{N \cdot \sum P_j^2 - (\sum P_j)^2} \text{ e } \lambda = \frac{\theta}{A_0} \quad (4.3)$$

Com θ :

$$\theta = \frac{N \cdot \sum (P_j \cdot A_{p_j}) - \sum P_j \cdot \sum A_{p_j}}{N \cdot \sum P_j^2 - (\sum P_j)^2} \quad (4.4)$$

As incertezas do tipo A de A_0 e λ e A_p são calculadas através das variâncias e covariâncias de A_0 e λ . [12], cujas equações 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10 estão representadas:

$$u(A_0) = \sqrt{N.V(A_0)} \quad (4.5)$$

$$u(\lambda) = \frac{\sqrt{N.V(\theta)}}{A_0} \quad (4.6)$$

$$u(A_p) = \sqrt{N.V(A_0) + V(\theta).P^2 + 2.\text{cov}(A_0, \theta).P} \quad (4.7)$$

$$V(A_0) = \frac{\sum P_j^2}{N \cdot \sum P_j^2 - (\sum P_j)^2} \cdot \frac{\sum (A_{p_j} - A_0 - \theta.P_j)^2}{N-2} \quad (4.8)$$

$$V(\theta) = \frac{N}{N \cdot \sum P_j^2 - (\sum P_j)^2} \cdot \frac{\sum (A_{p_j} - A_0 - \theta.P_j)^2}{N-2} \quad (4.9)$$

$$\text{cov}(A_0, \theta) = -\frac{\sum P_j}{N \cdot \sum P_j^2 - (\sum P_j)^2} \cdot \frac{\sum (A_{p_j} - A_0 - \theta.P_j)^2}{N-2} \quad (4.10)$$

Sendo N o número de patamares de pressão. Neste caso em concreto, $N=10$.

4.2. Método dos Mínimos Quadrados Ordinários

Primeiro Valor Excluído

Tal com já se referiu, este método é semelhante ao anterior (4.1), mas com a diferença de se retirar um dos patamares de pressão.

Na prática, a ausência de linearidade ou uma maior dispersão nos valores experimentais, é frequentemente mais significativa a baixas pressões. Logo, o ponto de pressão mais baixo é descartado, devido a contribuir negativamente no método estatístico abordado no ponto 4.1. Invalida-se então a solução matemática típica para os problemas como este, cuja aplicação da equação (2.3.2), toma a forma de 4.11.

$$Max(\sigma_{A_p}^2) = [(A_{p_1} - \overline{A_p})^2, (A_{p_2} - \overline{A_p})^2, ..., (A_{p_N} - \overline{A_p})^2] \quad (4.11)$$

Não será necessário fazer uma seleção recorrendo á estatística para selecionar o ponto, pois já se sabe empiricamente, que este primeiro valor de pressão será sempre o mais desfavorável.

Assim sendo o N passará a ser $N=10-1$, logo $N=9$.

O primeiro ponto de pressão é eliminado. Bem como todos os fatores referentes a este ponto de pressão.

Efetua-se então aos passos do método do ponto 4.1, sem esquecer, que agora a população tem menos um elemento.

4.3. Método dos Mínimos Quadrados Ponderados (WLS)

A aplicação deste método, também é fornecida pelo guia “*EURAMET cg-3v Pressure Balance*” no caso da calibração de BM por comparação.

Este método utiliza as equações (4.1, 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5), mas considera-se que a incerteza associada a A_{Pi} pode variar significativamente com a pressão P_i .

Este método pode ser aplicado para se ter em conta a variação da dependência dos valores experimentais obtidos e para otimizar o cálculo da área efetiva e da sua incerteza associada.

A ponderação (g_i) associada a cada ponto A_{Pi} vai ser introduzida no processo estatístico. Sendo essa ponderação uma fonte de incerteza, é considerado que introduz os desvios que ocorrem na determinação da área efetiva (A_p), causados pelos fatores de entrada na equação 1 e as variações aleatórias de A_p obtidas para o mesmo ponto de pressão caracterizadas pelos seus desvios. O valor de cada ponderação g_j é determinado pela equação 4.12 [12] da seguinte forma:

$$g_i = \frac{1}{\sum u_j^2(A_{pj})} \quad (4.12)$$

A área efetiva (A_0) e o coeficiente de distorção (λ) podem ser calculados recorrendo às seguintes expressões iguais a (4.1 e 4.2):

$$A_0 = \frac{\sum g_j \cdot P_j^2 \cdot \sum g_j \cdot A_{pj} - \sum g_j \cdot P_j \cdot \sum g_j \cdot P_j \cdot A_{pj}}{\sum g_j \cdot \sum g_j \cdot P_j^2 - (\sum g_j \cdot P_j)^2} \text{ e } \lambda = \frac{\theta}{A_0}$$

$$\theta = \frac{\sum g_j \cdot \sum g_j \cdot P_j \cdot A_{pj} - \sum g_j \cdot P_j \cdot \sum g_j \cdot A_{pj}}{\sum g_j \cdot \sum g_j \cdot P_j^2 - (\sum g_j \cdot P_j)^2}$$

E as suas variâncias e covariâncias, são calculadas do seguinte modo utilizando as fórmulas 4.13, 4.14 e 4.15.

$$V(A_0) = \frac{\sum g_j \cdot P_j^2}{\sum g_j \cdot \sum g_j \cdot P_j^2 - (\sum g_j \cdot P_j)^2}, \quad (4.13)$$

$$V(\theta) = \frac{\sum g_j}{\sum g_j \cdot \sum g_j \cdot P_j^2 - (\sum g_j \cdot P_j)^2}, \quad (4.14)$$

E:

$$\text{cov}(A_0, \theta) = - \frac{\sum g_j \cdot P_j}{\sum g_j \cdot \sum g_j \cdot P_j^2 - (\sum g_j \cdot P_j)^2} \quad (4.15)$$

Os cálculos das respectivas incertezas são realizados recorrendo às fórmulas (4.3, 4.4 e 4.5), indicadas no ponto 4.2.

4.4. Método dos Mínimos Quadrados Generalizados (GLS)

Este processo complexo tem em conta a contribuição das incertezas e a correlação entre as áreas efetivas (A_p).

Para facilitar os cálculos vai-se introduzir uma alteração na fórmula (1), que apresenta uma forma linear. Ficará então da seguinte forma de 4.16.

$$A_p = A_0.(1 + \lambda.P) \rightarrow A_p = \beta_0 + \beta_1.P \quad (4.16)$$

Em que $\beta_0=A_0$ e $\beta_1=A_0.\lambda$,da balança de teste

Sendo o estimador definido por 4.17

$$\beta = (X'.V^{-1}.X)^{-1}.(X'.V^{-1}.Y) \quad (4.17)$$

Neste caso interessa que β seja traduzido numa matriz 2x1 em que:

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

Para se calcularem as incertezas associadas $U(\beta)$ aos valores β_0 e β_1 sabe-se que:

$$U(\beta) = (X^T.V^{-1}.X)^{-1} = \begin{bmatrix} u(\beta_0)^2 & \text{cov}(\beta_0, \beta_1) \\ \text{cov}(\beta_0, \beta_1) & u(\beta_1)^2 \end{bmatrix}$$

Verifica-se então que $u(\beta_0) = \sqrt{\beta_0}$ e $u(\beta_1) = \sqrt{\beta_1}$, e as incertezas da área efectiva á pressão de referencia $u(A_0)$ e do coeficiente de distorção $u(\lambda)$ da balança de teste ficam:

$$u(A_0) = u(\beta_0),$$

$$u(\lambda) = \sqrt{\left(\frac{u(\beta_1)}{\beta_0}\right)^2 + \left(\beta_1 \cdot \left(\frac{u(\beta_0)}{\beta_0}\right)^2\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{\beta_1}{\beta_0}\right)^3 \cdot \text{cov}(\beta_0, \beta_1)} \quad (4.18)$$

A matriz X é aqui representada pelos valores das pressões P_j , que corresponde á variável das ordenadas, que em conjunto com A_0 e λ , vai afetar os valores de A_{pj} . Fica então:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & P_1 \\ 1 & P_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & P_{10} \end{bmatrix}$$

E:

$$Y = \begin{bmatrix} A_{p_1} \\ A_{p_2} \\ \vdots \\ A_{p_{10}} \end{bmatrix}$$

Em que X e Y são respetivamente matrizes de dimensões de 10x2 e 10x1. [13]

A dificuldade do método é agora a determinação da matriz V, que tem a forma de [10]:

$$V = \begin{bmatrix} u_{A_{p_1}}^2 & u(A_{p_1}, A_{p_2}) & \dots & u(A_{p_1}, A_{p_j}) & \dots & u(A_{p_1}, A_{p_{10}}) \\ u(A_{p_1}, A_{p_2}) & u_{A_{p_2}}^2 & \dots & u(A_{p_2}, A_{p_j}) & \dots & u(A_{p_2}, A_{p_{10}}) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ u(A_{p_1}, A_{p_j}) & u(A_{p_2}, A_{p_j}) & \dots & u_{A_{p_j}}^2 & \dots & u(A_{p_j}, A_{p_{10}}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ u(A_{p_1}, A_{p_{10}}) & u(A_{p_2}, A_{p_{10}}) & \dots & u(A_{p_j}, A_{p_{10}}) & \dots & u_{A_{p_{10}}}^2 \end{bmatrix}$$

Para se poder determinar a matriz V é necessário;

- Calcular a matriz covariância U(A_p)

Os valores de área efetiva (A_p) em função da pressão (P) são aplicados ao método GLS. As correlações entre os diferentes pontos de pressão são devidas às incertezas originadas pela propagação dos erros sistemáticos. [14]

O modelo multivariável definido pela equação (4a) evidencia uma relação entre a pressão resultante (grandezas de saída) e as grandezas de entrada na balança de referência, que podem ser definidas pela matriz: X =(M_i, A₀, λ, ΔT, ρ_a, ρ_m, ρ_f, Δh, g, α, Γ, C)^T, que toma a forma de 4.19 e 4.20

$$P_j = \frac{\sum_i M_i \cdot g \cdot \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_{m_i}}\right) + \Gamma \cdot C}{A_0 \cdot (1 + \lambda \cdot P) \cdot [1 + \alpha \cdot (T_i - T_r)]} + \rho_{fluido} \cdot g \cdot \Delta h \quad (4.19)$$

E:

$$\Delta T = T_i - T_r \quad (4.20)$$

Que por sua vez igualando a zero fica com a forma de 4.21

$$h_{li}(X, Y) = (P - g \cdot \rho_f \cdot \Delta h) \cdot A_0 \cdot (1 + \lambda \cdot P) \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T_i) - M_i \cdot g \cdot \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_m}\right) - \Gamma \cdot C = 0 \quad (4.21)$$

A matriz covariância U_P com uma dimensão 10x10 associada a $Y = (P_1, \dots, P_{10})^T$ é obtida através da relação 4.22 [10]:

$$C_Y \cdot U_Y \cdot C_Y^T = C_X \cdot U_X \cdot C_X^T \quad (4.22)$$

Onde: C_Y é a matriz dos coeficientes de sensibilidade de dimensão 10x10 que contem as derivadas parciais $\frac{\partial h_l}{\partial P_i}$ em que $l = (1, \dots, 10)$ e $i = (1, \dots, 10)$, que fica:

$$C_Y = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial P_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_2}{\partial P_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\partial h_{10}}{\partial P_{10}} \end{bmatrix}$$

; C_X é a matriz de dimensão 10x14 contendo as derivadas parciais $\frac{\partial h_l}{\partial X_i}$, em que $l = (1, \dots, 10)$ e $i = (1, \dots, 14)$

$$C_X = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial A_0} & \frac{\partial h_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial h_1}{\partial \Delta h} & \frac{\partial h_1}{\partial \Delta T} & \frac{\partial h_1}{\partial M_1} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial h_2}{\partial A_0} & \frac{\partial h_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial h_2}{\partial \Delta h} & \frac{\partial h_2}{\partial \Delta T} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial M_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_{10}}{\partial A_0} & \frac{\partial h_{10}}{\partial \lambda} & \frac{\partial h_{10}}{\partial \Delta h} & \frac{\partial h_{10}}{\partial \Delta T} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial h_{10}}{\partial M_{10}} \end{bmatrix}$$

Note-se que foram escolhidas somente quatro grandezas de entrada num universo de dez entradas. A razão pela qual não se contabilizou ρ_a , ρ_m , é porque a sua contribuição vai entrar no cálculo de A_p , como se verá mais adiante. É de relembrar que g , C , α , não são contabilizados em nenhuma matriz, por se considerar neste projeto que as suas incertezas são praticamente iguais a zero. E por fim ρ_f , Γ são contribuições nulas, porque o fluido manométrico é o mesmo para a duas balanças, tanto para a de referência como para a de teste, ou seja, acabam por se anular uma à outra.

U_X é a matriz covariância de dimensão 14x14 contendo as incertezas ao quadrado das grandezas consideradas em C_X , que vai tomar a forma de:

$$U_X = \begin{bmatrix} u(A_0)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u(\lambda)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u(\Delta h)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u(\Delta T)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u(M_1)^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & u(M_{10})^2 \end{bmatrix}$$

U_y e U_X estão relacionados por 4.23.

$$U_p = U_Y = C \cdot U_X \cdot C^T \quad (4.23)$$

Onde:

$$C = C_Y^{-1} \cdot C_X \quad (4.24)$$

Obteve-se assim a matriz das incertezas do cálculo das pressões na balança U_p de referência, cujo resultado dá uma matriz 10x10.

- Calcular a matriz covariância U_{Ap}

Utiliza-se a mesma abordagem para calcular a matriz covariância das incertezas das áreas efetivas em cada ponto de pressão da BM de teste (U_{Ap}).

Sabe-se que na balança de teste, a relação entre as grandezas de saída $Y = (A_{p1}, A_{p2}, \dots, A_{p10})^T$ e as grandezas de entrada na balança de teste $Z = (M', P, \alpha', \Delta T', \rho_a, \rho_m, g, \Gamma, C')^T$, é dada por 4.25 e 4.26:

$$A_{p_j} = \frac{\sum_i M'_{ij} \cdot g \cdot \left(1 - \frac{\rho_{a_j}}{\rho_{m_j}}\right) + \Gamma \cdot C'}{P_j \cdot [1 + \alpha' \cdot (T'_j - T_r)]} \quad (4.25)$$

E:

$$\Delta T'_j = T'_j - T_r \quad (4.26)$$

Igualando a zero, fica como 4.27:

$$h_{ij}(A_p, Z) = A_p \cdot P \cdot (1 + \alpha \Delta T'_i) - M'_i \cdot g \cdot \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_m}\right) - \Gamma' \cdot C = 0 \quad (4.27)$$

A matriz covariância U_{Ap} com uma dimensão 10x10 associada a $Y = (A_{p1}, \dots, A_{p10})^T$ é obtida através da relação (4.22):

$$C_Y \cdot U_Y \cdot C_Y^T = C_X \cdot U_X \cdot C_X^T$$

Onde: C_Y é a matriz dos coeficientes de sensibilidade de dimensão 10x10 que contem as derivadas parciais $\frac{\partial h_l}{\partial A_{p_j}}$ em que $l = (1, \dots, 10)$ e $j = (1, \dots, 10)$, que fica:

$$C_Y = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial A_{p_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_2}{\partial A_{p_2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\partial h_{10}}{\partial A_{p_{10}}} \end{bmatrix}$$

; C_X é a matriz de dimensão 10x23 contendo as derivadas parciais $\frac{\partial h_l}{\partial Z_j}$, em que $l = (1, \dots, 10)$ e $j = (1, \dots, 23)$

$$C_X = \begin{bmatrix} \frac{\delta h_1}{\delta P_1} & 0 & \dots & 0 & \frac{\delta h_1}{\delta \Delta T'} & \frac{\delta h_1}{\delta \rho_a} & \frac{\delta h_1}{\delta \rho_m} & \frac{\delta h_1}{\delta M_1'} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\delta h_2}{\delta P_2} & \dots & 0 & \frac{\delta h_2}{\delta \Delta T'} & \frac{\delta h_2}{\delta \rho_a} & \frac{\delta h_2}{\delta \rho_m} & 0 & \frac{\delta h_2}{\delta M_2'} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\delta h_{10}}{\delta P_{10}} & \frac{\delta h_{10}}{\delta \Delta T'} & \frac{\delta h_{10}}{\delta \rho_a} & \frac{\delta h_{10}}{\delta \rho_m} & 0 & 0 & \dots & \frac{\delta h_{10}}{\delta M_{10}'} \end{bmatrix}$$

Como pode ser observado, todas as grandezas de entrada que são contabilizadas são diferentes das entradas anteriormente consideradas. Assim não haverá um contributo repetido de nenhuma incerteza.

O cálculo da matriz U_X como se irá ver vai ser ligeiramente diferente da anterior, pois terá de ter em conta a incerteza das pressões (U_P) que agora se irão propagar para a balança de teste.

Tem-se então uma matriz de dimensões 23x23 que fica:

$$U_X = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} U_P \\ 10 \times 10 \end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & u(\Delta T')^2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & u(\rho_a)^2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & u(\rho_m)^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & u(M_1')^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u(M_2')^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u(M_{10}')^2 \end{bmatrix}$$

Recorrendo agora á equação (4.24) e á sua relação (4.22),

$$C_Y \cdot U_Y \cdot C_Y^T = C_X \cdot U_X \cdot C_X^T$$

Está-se nas condições de determinar U_Y (4.28), cujo resultado agora representa a matriz U_{Ap} .

$$U_{Ap} = U_Y = C \cdot U_X \cdot C^T \quad (4.28)$$

Contudo, esta matriz contém somente o quadrado das incertezas do tipo B $u(A_{Pj})_B$ na sua diagonal principal.

$$U(A_{Pj})_B = \begin{pmatrix} u(A_{P_1})_B^2 & u(A_{P_1}, A_{P_2}) & \cdots & u(A_{P_1}, A_{P_{10}}) \\ u(A_{P_1}, A_{P_2}) & u(A_{P_2})_B^2 & \cdots & u(A_{P_2}, A_{P_{10}}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(A_{P_1}, A_{P_{10}}) & u(A_{P_2}, A_{P_{10}}) & \cdots & u(A_{P_{10}})_B^2 \end{pmatrix}$$

É então necessário adicionar as incertezas do tipo A. Para isso é necessário construir a matriz das incertezas do tipo A.

Como foram efetuado 5 ciclos de medições para cada caso teórico, depois de se ter calculado os valores de A_{Pj} para cada ponto em cada ciclo, foi feita a média aritmética e o respectivo desvio para cada ciclo. Sendo assim, o desvio padrão resultante para cada ponto de pressão, será então a incerteza do tipo A $u(A_{Pj})_A$, associada ao respectivo valor de A_{Pj} , que por sua vez é o resultado da média aritmética dos cinco ciclos dos valores das áreas efetivas da balança de teste.

A matriz foi então construída, ficando:

$$U(A_{Pj})_A = \begin{pmatrix} u(A_{P_1})_A^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u(A_{P_2})_A^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u(A_{P_{10}})_A^2 \end{pmatrix}$$

Agora fazendo a soma matricial entre $U(A_{Pj})_B$ e $U(A_{Pj})_A$, (equação 4.29), obtém-se finalmente a matriz V, em que:

$$V = U(A_{Pj})_B + U(A_{Pj})_A \quad (4.29)$$

Fica-se assim nas condições de calcular a área efetiva à pressão nula, e o coeficiente de distorção e as suas respectivas incertezas na balança de teste.

4.5. Modelo (A_0, λ, F)

Como foi referido na alínea 2.3.5, este modelo vai ser aqui demonstrado mais detalhadamente, pois o conhecimento deste método é meramente aplicativo. Desconhece-se a sua base matemática.

Este modelo, (PTB – Alemanha), foi desenvolvido pela análise de 4 modelos de equação em que cada um representa a dependência da área efetiva pela pressão na balança de teste:

$$A_0\text{-model:} \quad A(p) = A_0, \quad (4.30)$$

$$A_0, \lambda\text{-model:} \quad A(p) = A_0 + A_0 \lambda \cdot p, \quad (4.31)$$

$$A_0, F\text{-model:} \quad A(p) = A_0 + \frac{F}{p}, \quad (4.32)$$

$$A_0, \lambda, F\text{-model:} \quad A(p) = A_0 + A_0 \lambda \cdot p + \frac{F}{p}. \quad (4.33)$$

Na prática, A_0 -model, (equação 4.30), corresponde ao caso em que a área efetiva é independente da pressão, e ao A_0, λ -model, (equação 4.31), corresponde uma dependência linear da área efetiva com a pressão [10];

O A_0, F -model, (equação 4.32), considera a existência de uma força desconhecida adicional, que atua sobre o pistão da balança de referência ou da balança de teste, que é constante em todos os seus pontos de pressão e pode ser associada às incertezas geradas pela massa do pistão, massa do sino, diferença de altura, massa volúmica do fluido, etc.

Finalmente, A_0, λ, F –model, (equação 4.33), parte do princípio que existe uma incerteza tanto no produto do coeficiente de distorção com a pressão, como na hipotética força desconhecida “ F ”, representada na figura 4.1. [10]

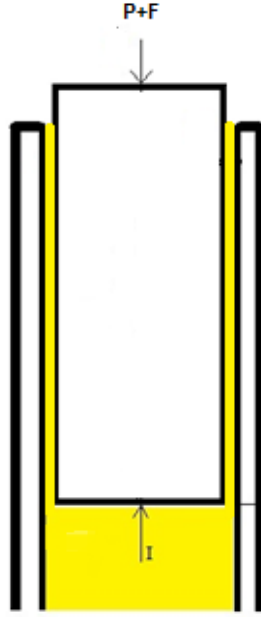


Figura 4.1 - Ação da força desconhecida sobre o pistão

Tendo em conta este último modelo (A_0, λ, F –model) chega-se então às seguintes formas de obter os valores da área efetiva à pressão nula (A_0), (equação 4.34) e do coeficiente de distorção (λ) (equação 4.35):

$$A_0 = \frac{X \cdot X_2 Y \cdot X^{-2} - N \cdot X \cdot X_2 X^{-1} + X^{-1} \cdot X^2 \cdot X_2 X^{-1} - N \cdot X^{-1} \cdot X X_2 + N^2 \cdot X_2 - X_2 \cdot X^2 \cdot X^{-2}}{N^3 - N \cdot X^2 \cdot X^{-2} - 2N \cdot X \cdot X^{-1} + (X)^2 \cdot X^{-2} + (X)^{-2} \cdot X^2} \quad (4.34)$$

$$\lambda = \frac{A_0 \cdot (N \cdot X^{-1} - X^{-2} \cdot X) + X^{-2} \cdot X_2 - N \cdot X_2 X^{-1}}{A_0 \cdot (N^2 + X^2 \cdot X^{-2})}, \quad (4.35)$$

Com as grandezas de entrada definidas nas seguintes equações:

$$X = \sum p_j \quad (4.36)$$

$$X^2 = \sum p_j^2, (X)^2 = \left(\sum p_j \right)^2 \quad (4.37)$$

$$X^{-2} = \sum p_j^{-2} \quad (4.38)$$

$$(X)^{-2} = \left(\sum p_j^{-1} \right)^2 \quad (4.39)$$

$$X_2 = \sum A_j \quad (4.40)$$

$$X X_2 = \sum p_j \cdot A_j \quad (4.41)$$

$$X_2 X^{-1} = \sum A_j / p_j \quad (4.43)$$

$N = 10$ (correspondente ao numero de pontos de pressão para o caso estudado)

O cálculo das incertezas que são aplicadas neste método foi baseado nas equações (4.3 á 4.7) do método OLS.

A razão por não se ter aplicado a metodologia de cálculo das incertezas do correspondente método, foi devido ao facto da existência de algumas incorreções na explicação do mesmo.

Capítulo 5

Discussão dos Resultados da Aplicação dos Métodos Estatísticos

Como seria de prever, os resultados obtidos neste estudo não diferem muito relativamente aos resultados do Project 1125 realizado.

Alguns desvios de resultados devem-se exclusivamente a abordagens diferentes nos cálculos de alguns fatores. [15]. Será então compreensível, que essas diferenças se traduzam em variações nos resultados finais, tanto neste estudo, como entre os vários laboratórios que utilizaram os mesmos métodos estatísticos mas não obtiveram resultados exatamente iguais.

5.1. Expressões Consideradas

As diferentes expressões aplicadas pelos vários LNM foram testadas com o fim de determinar aquela que iria proporcionar o melhor resultado final. Contudo esse estudo não foi conclusivo pois os resultados finais consistem em quatro parâmetros diferentes, $(A_0, \lambda, u(A_0) \text{ e } u(\lambda))$, que originou um paradoxo nas conclusões pretendidas, visto que, quando um dos parâmetros resultava num valor mais próximo do valor exato desse mesmo parâmetro, o outro parâmetro resultava mais afastado do valor real do que o resultado previamente obtido aplicando outra expressão no cálculo desses fatores.

Ou seja, dificilmente se poderá optar por uma sequência de expressões para calcular os fatores que garantissem uma maior exatidão.

As expressões utilizadas para determinar alguns dos fatores que variavam entre os vários LNM são as seguintes:

- Massa Volúmica do Ar (5.1)

$$\rho_{Ar} = \frac{0,0034848.P - 0,009024.Hr.e^{0,016.T_{Ar}}}{273,15 + T_{Ar}} \quad (5.1)$$

- Massa Volúmica do Gás (5.2)

$$\rho_{N_2} = \frac{P.M}{R.T} \quad (5.2)$$

- Massa Volúmica do Óleo (5.3)

$$\rho_{liq} = \beta_e.(T_i - T) + z.(P_i - P_{Atm}) \quad (5.3)$$

- Perímetro do Pistão (5.4)

$$C = 2.\sqrt{\pi.A_{0_TH}} \quad (5.4)$$

A opção pela utilização destas expressões foi devida ao facto de o IPQ já as utilizar anteriormente nas suas calibrações.

5.2. Resultados Obtidos

Tendo em consideração os desvios que podem ocorrer na estimativa dos parâmetros, consideraram-se como válidos os resultados que estivessem próximos dos valores dados como exatos nesta simulação.

Mais uma vez, realça-se o facto de que o estudo consistia em quatro casos distintos, 2 numa BM a gás e outros dois numa BM a óleo. No entanto, devido ao tratamento análogo a todos os casos, por uma questão de objetividade só serão apresentados os resultados do caso 2 da balança a óleo.

No caso da balança a óleo os resultados da aplicação de cada método foram os seguintes representados na tabela 5.1.

Tabela 5.1 - Resultados da BM de óleo

Balança de Óleo						
		OLS	OLS 9 Pts	WLS	GLS	Model (A_0, λ, F)
Caso 2	$A_0 (mm^2)$	1,902881	1,902911	1,902901	1,902916	1,902918
	$u(A_0) (mm^2)$	0,000049	0,000009	0,000049	0,000033	0,000049
	$\lambda (Pa^{-1})$	$8,36 \times 10^{-13}$	$7,89 \times 10^{-13}$	$8,07 \times 10^{-13}$	$7,54 \times 10^{-13}$	$7,76 \times 10^{-13}$
	$u(\lambda) (Pa^{-1})$	$9,21 \times 10^{-14}$	$1,61 \times 10^{-14}$	$9,21 \times 10^{-14}$	$5,99 \times 10^{-14}$	$9,21 \times 10^{-14}$

Apresentam-se as figuras 5.1 e 5.2 em que estão representadas graficamente os resultados da tabela 5.1.

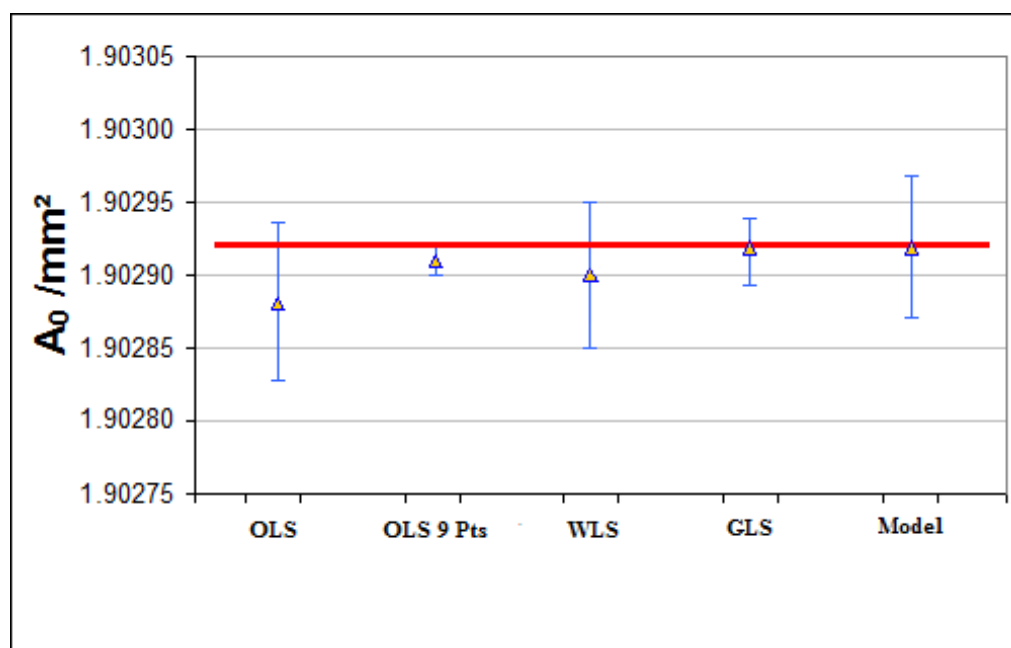


Figura 5.1 - Gráfico de resultados de A_0 para o caso 2 a óleo

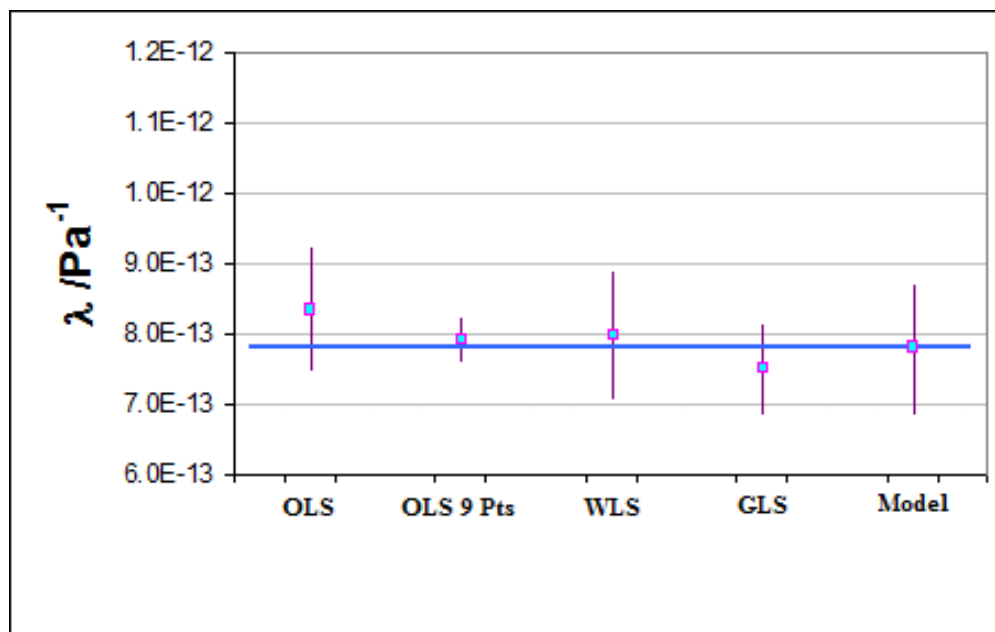


Figura 5.2 - Gráfico de resultados de λ para o caso 2 a óleo

5.3. Discussão dos Resultados

Os resultados obtidos, tal como era expectável, não divergem significativamente dos obtidos anteriormente no Project 1125. No entanto, existe uma diferença significativa na dimensão das incertezas obtidas devido às diferenças entre os cálculos dos fatores descritos previamente no ponto 5.1.

As incertezas, que são caracterizadas nos gráficos como retas verticais, mostram que todas as incertezas verificam a proximidade dos valores obtidos.

No entanto, não se vai dar muita relevância às incertezas, por dois motivos: Em primeiro lugar, todos os métodos, à exceção do método GLS, vão fornecer incertezas do tipo A que por si só, não chegam para descrever todo um processo de calibração que contem muitas fontes de incerteza que se vão propagando ao longo do processo. Em segundo lugar, este estudo já tem como base os valores iniciais de pressão, área efetiva e sua incerteza associada à balança de teste, fornecidos para o 2º loop, que tal como foi referido, já contêm as incertezas conjugadas do tipo A e B.

Note-se que as incertezas são valores de grande sensibilidade, devido aos seus valores muito pequenos. É de esperar então uma grande variação de método para método, sendo difícil, ou até

mesmo erróneo, tentar determinar qual o mais correto. Por esse motivo, existem formas teóricas de se obter essas incertezas. Esse facto pode ser observado no ponto 3.1 em que são fornecidas as incertezas da área efetiva à pressão nula e do coeficiente de distorção da balança de referência.

Para o caso especial do método GLS, os valores de partida não foram os mesmos dos outros métodos, pois devido á sua forma matricial necessita de todos os fatores como INPUT para debitar os resultados, também eles na forma matricial e que por sua vez já continham as incertezas os parâmetros.

No que toca à área efectiva à pressão de referência, o método GLS revelou uma grande consistência nos resultados, mantendo-se sempre muito próximo do valor real. Já no coeficiente de distorção, os resultados revelaram-se afastados do valor teórico.

O mesmo já não acontece com o OLS que se revelou o método que mais se distancia do valor real em ambos os resultados.

Um método que se revelou bastante surpreendente foi o OLS first value excluded que é um derivado do OLS, e é descrito nas figuras dos resultados com sendo OLS 9 Pts (*Ordinary Least Squares*). Método esse em que se considera somente nove pontos com a exclusão do primeiro ponto de pressão. Os valores foram bastante próximos do valor real.

Note-se mais uma vez, que as incertezas associadas aos parâmetros, foram calculadas recorrendo às mesmas equações que foram aplicadas nos outros métodos, mas o resultado foi muito melhor, devido ao facto de neste caso serem considerados somente nove pontos em vez dos dez pontos de pressão considerados nos outros métodos.

Outro método que relativamente à média dos métodos se destaca pela negativa é o WLS. Este método a par com o OLS vem descrito no guia de calibração “*EURAMET cg-3v Pressure Balance*”, e tal como o OLS, revelou-se distante do valor real no cálculo da área efetiva á pressão de referência A_0 .

Por fim o método que se revelou mais preciso foi o Model (A_0, λ, F), que tal como o GLS se aproxima muito do valor real.

Capítulo 6

Conclusão

Vai-se em seguida caracterizar cada método referindo-se as suas vantagens e desvantagens, a fim de se concluir qual o método mais adequado para uma aplicação numa calibração real.

Ir-se-á ter em conta na avaliação dos métodos estatísticos, características como a complexidade da aplicação do método, recursos utilizados, exatidão, eficácia, robustez, flexibilidade, e por fim o custo. Todas as características são relativas aos métodos abordados.

É de excluir de imediato o ponto “recursos utilizados” pois em qualquer um dos métodos, neste estudo, foi utilizada como ferramenta de cálculo o Excel®. Não sendo necessário então considerar este ponto nesta avaliação:

OLS

Este método, já usado previamente pelo IPQ, vem descrito no guia de calibração “*EURAMET cg-3v Pressure Balance*”, o que implica que, sendo um método muito usado e como consequência já adaptado, não necessita de nenhum investimento adicional, seja ele de tempo ou financeiro.

A sua aplicação é relativamente fácil, não só porque vem descrita no guia de calibração, mas também porque é um método em que é considerada uma relação linear entre a pressão e a área efetiva. Também permite uma elevada flexibilidade para a aplicação em casos de calibração com diferentes configurações de pontos de pressão.

Infelizmente, este método revela-se insatisfatório em termos de resultados. Revelou ao longo de todas as etapas deste estudo, uma grande falta de robustez e exatidão.

OLS Primeiro Valor Excluído

Como foi referido anteriormente, este método mostrou-se surpreendentemente robusto e exato ao longo deste estudo. O facto de ser um derivado do OLS faz com que seja um método também ele de fácil aplicação devido á relação linear entre a pressão e a área efetiva considerada.

Embora não seja descrito no guia, a única alteração que tem de ser efetuada relativamente ao OLS, é somente retirar o primeiro ponto de pressão. Assim sendo, também é um método bastante flexível.

WLS

Tal como o OLS, este método vem descrito no referido guia de calibração, mas ao contrário do OLS, não é utilizado pelo IPQ bem como pela maioria dos restantes LNM, o que vai implicar, numa possível mudança para este método, um certo investimento de tempo adicional.

Este método, tal como o OLS, revelou-se insatisfatório no que toca aos resultados, que apareceram com pouca exatidão. Contudo, este método foi abordado neste estudo na sua forma menos complexa, em que se considera a relação entre a pressão e a área efetiva linear. Mesmo assim, regra geral, os resultados obtidos revelaram-se mais exatos do que o OLS.

De resto, este método é bastante flexível, pois tal como o OLS, permite a aplicação em casos de calibração com diferentes configurações de pontos de pressão, com bastante facilidade.

GLS

No que toca a eficácia, este é o único método que se destaca nesta característica. A maneira como os resultados são obtidos é única, pois ao contrário dos outros métodos, este tem uma forma matricial que vai gerar os resultados todos de uma só vez, sem ter de se recorrer a várias expressões diferentes, como é o caso dos outros métodos.

Este método considera uma relação não linear entre a pressão e a área efetiva. Ou seja, os resultados finais são afetados e mais diretamente relacionados com muitos mais fatores do que nos métodos OLS e WLS, o que origina uma maior exatidão e robustez.

A dificuldade deste método é elevada, pois a sua forma matricial, leva a que os cálculos sejam complexos. Assim sendo, a flexibilidade do método também deixa muito a desejar, bem como o custo, que seria elevado devido ao tempo que poderia ser despendido na adaptação do método a cada caso de calibração.

Modelo (A_0, λ, F)

Finalmente, este modelo a par com o GLS revelou-se muito exato e robusto. Pode-se observar que foi o método que obteve os resultados mais próximos do valor real.

A sua aplicação é semelhante ao método do OLS, beneficiando da sua fácil aplicação e respetiva flexibilidade.

Assim sendo, o método mais adequado para ser adotado, será o Model (A_0, λ, F), pois é aquele que apresenta os resultados mais exatos, e a aplicação deste método também não terá grande dificuldade.

Não havendo nenhuma contrariedade que pudesse resultar num investimento, de tempo, material, ou formação, podemos concluir que, será benéfico para o aumento da qualidade das calibrações feitas às BM, a evolução do modelo estatístico atualmente usado pelo IPQ (OLS), para o Model (A_0, λ, F).

Este estudo revelou-se importante, devido á crescente exigência de toda uma indústria em constante melhoramento e devido á utilidade da metrologia nas restantes ciências e engenharias.

A importância deste estudo, serviu também de apoio ao próprio estudo comparativo, (Euramet Project 1125), cujo relatório [10], continha algumas incorreções nas formulas explicativas de alguns dos métodos utilizados, e foi possível, devido a esta dissertação, a identificação e correção desses erros.

Poderá aprofundar-se uma possível adaptação informática para facilitar e aumentar a flexibilidade dos métodos, reduzindo assim o tempo que se perde a realizar estas adaptações.

Referências Bibliográficas

- [1] Chrysler Group LLC, Ford Motor Company, General Motors Corporation, *Measurement Systems Analysis*, Reference Manual, 4ª Edição, 2010.
- [2] (2009) www.ipq.pt/custompage Instituto Português da Qualidade. IPQ
- [3] Frank M. White, *Mecânica dos Fluidos*, 7ª Edição, McGraw-Hill (2010).
- [4] IPQ. (2005) *Guia para a expressão de incertezas de medição nos Laboratórios de medição*. 2ª edição IPQ.
- [5] John O. Rawlings, Sastry G. Pantula, David A. Dickey, *Applied Regression Analysis A Research Tool*, 2ª Edição, Springer (1998).
- [6] Joint Committee for Guides in Metrology. (2009). *Evaluation of measurement data – Supplement 2 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Models with any number of output quantities*, Thousand Oaks, Draft.
- [7] C. Radhakrishna Rao, Helge Toutenburg, Shalabh, Christian Heumann, M. Schomaker, *Linear Models and Generalizations: Least Squares and Alternatives*, 3ª edição Springer (2010).
- [8] Cambridge University Press The Edinburgh Building, *Dynamic Data Assimilation: A Least Squares Approach*, 1ª edição, Cambridge University Press (2006).
- [9] Stephen L. Campbell, Carl D. Meyer, *Generalized Inverses of Linear Transformations*, 1ª Edição, SIAM (2008).
- [10] Dr. Dietmar Steindl, Dr. Alexandros Lefkopoulos, Dr. Alexandros Lefkopoulos, Dr. Lovorca Grgec Bermanec, Eng. Sanja Bursic, Dr. Janez Setina, Dr. Mercede Bergoglio, Eng. Isabel Spohr, Dr. Isabelle Morgado, Dr. Christian Wüthrich, Dr. Markku Rantanen & Dr. Sari Saxholm, Dr Csilla Vámosy, , Dr. Ilknur Koçaş (2011) *Euramet Project 1125 – report draft B, Evaluation of cross-float measurements with pressure balances*. Prepared by: Isabelle Morgado, LNE (Adaptado).
- [11] P. Otal, I. Morgado, D. Steindl, N. Medina Martín, A. Lefkopoulos, A. Altintas, L. Grgec Bermanec, S. Bursic, J. Setina, M. Bergoglio, I. Spohr, C. Wüthrich, M. Rantanen, C. Vámosy1, W. Sabuga, I. Koçaş, *Evaluation of crossfloat measurements with pressure balances – Results of EURAMET project 1125*, IPQ 2011

- [12] EURAMET cg-3 Calibration Guide (2011) *Calibration of Pressure Balances*. EURAMET e.V. Bundesallee 100, D-38116 Braunschweig, Germany
- [13] Douglas C. Montgomery, George C. Runger, *Applied Statistics and Probability for Engineers*, 5ª Edição, WILEY (2011).
- [14] M J T Milton, P M Harris, I M Smith, A S Brown and B A Goody, *Implementation of a generalized least-squares method for determining calibration curves from data with general uncertainty structures*, Teddington, MENDELEY (2006).
- [15] Daniel S. Wilks, *International Geophysics Series Volume 100 – Statistical Methods in the Atmospheric Sciences*, 3ª Edição, Elsevier (2011).